UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s7journaldemat03liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

ΑΒΙ Ο ΘΕΟΣ ΠΡΟΜΗΘΕΥ

Math.

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1847
PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884
PAR H. RESAL.

SEPTIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE
PAR CAMILLE JORDAN,
AVEC LA COLLABORATION DE
G. HUMBERT, E. PICARD.

TOME TROISIÈME. — ANNÉE 1917.
(82e Volume de la Collection.)

154640
6/4/20.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1917

Gr
1
T34
Copy 1
c.3

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur la représentation conforme;

PAR P. MONTEL.

INTRODUCTION.

1. La représentation conforme d'un domaine (D), limité par un seul contour (C) et contenu dans le plan de la variable Z, sur un domaine (D′) limité par un seul contour (C′) se ramène à la représentation conforme de chacun de ces domaines sur un cercle (d) de rayon *un* limité par la circonférence (c) et contenu dans le plan des z. La représentation est complètement déterminée si l'on fait correspondre deux éléments de contact arbitrairement choisis l'un dans (D) et l'autre dans (D′), c'est-à-dire si l'on considère comme éléments homologues deux points O et O′ intérieurs à ces domaines et deux directions OT et O′T′, tangentes à des courbes passant respectivement par O et par O′. Il suffit, dans les représentations de (D) et de (D′) sur (d), de faire correspondre les points O et O′ d'une part, les tangentes OT, O′T′ de l'autre, à un même point o du cercle, le centre, par exemple, et à une même direction ot passant par ce point.

C'est Riemann qui a montré le premier la possibilité d'une telle représentation [1]. Appelons $z = F(Z)$ une fonction faisant la représentation conforme de (D) sur (d) de manière que le point O corresponde au centre o du cercle. Posons $F(Z) = e^{U+iV}$, U et V étant des fonctions réelles des variables X, Y $(X + iY = Z)$. La fonction U est alors la fonction de Green correspondant au domaine (D) et au point O; comme $U + iV$ est analytique, V est une fonction associée de U, elle est déterminée à une constante additive près; il en résulte que $F(Z)$ est déterminé à un facteur constant près de module égal à un, $e^{i\varphi}$; les fonctions

$$z = e^{i\varphi} F(Z)$$

effectuent, quel que soit φ, la représentation conforme de (D) sur (d) de façon que O et o se correspondent. Quand on fait varier φ, le point z tourne autour de o d'un angle égal à la variation de φ. On peut donc déterminer la valeur de φ de manière que deux éléments de contact en O et en o se correspondent : la transformation est alors complètement déterminée.

La démonstration précédente montre que la représentation, quand elle est possible, est complètement déterminée par la correspondance de deux éléments de contact.

Mais, comme l'a montré Poincaré, on peut affirmer, dans tous les cas, qu'il ne peut y avoir deux manières de faire la représentation conforme de (D) sur (d) avec correspondance de deux éléments de contact [2]. Il est facile de l'établir : si l'on pouvait trouver deux représentations $z = F(Z)$, $z' = G(Z)$, il en résulterait une relation entre z et z' fournissant une représentation conforme non identique de (d) sur lui-même, de manière qu'un élément de contact en o se corresponde à lui-même. Nous retombons ici dans le cas précédent : la représentation conforme de (d) sur lui-même est unique dans les conditions supposées et c'est évidemment $z' = z$. Donc $F(Z)$ et $G(Z)$ sont identiques.

2. Dans quel cas la représentation conforme d'un domaine simple-

---

(1) Riemann, *Dissertation inaugurale* (*Œuvres complètes*, p. 40).

(2) Poincaré, *Acta mathematica*, t. IV, p. 231.

ment connexe (D) sur le cercle (d) est-elle possible? La théorie de Riemann repose sur l'existence d'une fonction de Green pour le domaine (D). Or, M. Osgood a démontré l'existence de cette fonction pour tout domaine simplement connexe dont la frontière ne se réduit pas à un point unique [1]. La représentation conforme d'un tel domaine sur un cercle est donc possible. M. Carathéodory, en considérant le domaine (D) comme la limite d'une suite infinie de domaines (D_n) pour lesquels la représentation est possible, a démontré la possibilité de cette représentation pour des domaines simplement connexes très généraux [2]. Les fonctions $f_n(z)$ qui donnent la représentation conforme de (d) sur (D_n) sont en effet bornées : elles forment une famille normale et, en appliquant à cette famille certains théorèmes que j'ai établis précédemment [3] et en introduisant une généralisation d'un lemme classique de M. Schwarz, M. Carathéodory obtient le résultat énoncé.

Je me suis placé au même point de vue : en remarquant que les fonctions $f_n(z)$ *et leurs fonctions inverses* forment des familles normales, j'ai démontré la possibilité de la représentation conforme pour un domaine simplement connexe quelconque dont la frontière ne se réduit pas à un seul point. C'est ce que je montre dans le Chapitre I du présent travail.

3. Considérons maintenant un domaine simplement connexe (D) dont la frontière est (C). Si l'on fait une représentation conforme de l'intérieur de (D) sur l'intérieur du cercle (d) limité par la circonférence (c), la correspondance entre les points frontières est déterminée. Il reste à étudier cette correspondance. Le cas où le con-

---

(1) Osgood, *On the existence of Greens Function for the most general simply connected plan region* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. I, 1900, p. 310-314).

(2) Carathéodory, *Untersuchungen über die Konformen Abbildungen von festen and veränderlichen Gebieten* (*Math. Annalen* t. LXXII, 1912, p. 107-144).

(3) *Sur les suites infinies de fonctions* (*Annales scientifiques de l'Ecole Normale*, 3e série, t. XXIV, 1907); *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe*, p. 20. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

tour (C) est formé par la réunion de plusieurs arcs analytiques est classique : la représentation conforme est univoque et continue même pour les points des contours, c'est-à-dire pour les domaines fermés (D) et (d). Le cas où le contour (c) forme un seul arc analytique a été traité par M. Schwarz; celui où il se compose de plusieurs arcs analytiques, par M. Picard. M. Painlevé s'est ensuite préoccupé le premier du cas où le contour n'est pas analytique : il a montré que la représentation est valable pour le domaine fermé en supposant seulement que la tangente à la courbe (C) varie d'une manière continue [1]. M. Carathéodory a étudié le cas d'une frontière quelconque [2] et cette étude a été reprise à un autre point de vue par M. Lindelöf qui a apporté des précisions nouvelles [3]. Je me propose d'apporter quelques compléments à l'étude de cette correspondance et de montrer qu'elle peut être faite en utilisant seulement les théorèmes généraux sur les fonctions analytiques et en leur adjoignant une proposition nouvelle.

Voici l'énoncé de cette proposition :

Soit $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$, une suite infinie de fonctions analytiques bornées dans leur ensemble dans l'intérieur d'un domaine connexe (Δ). Si cette suite converge uniformément sur un arc (γ) arbitrairement petit du contour limitant le domaine, elle converge aussi uniformément dans tout domaine intérieur à (Δ) et dont la frontière peut comprendre des portions de (γ).

La démonstration de ce théorème et de ses conséquences fait l'objet du Chapitre II.

Ce théorème, généralisation nouvelle d'une proposition classique de Weierstrass, permet, dans le Chapitre III, de montrer d'abord qu'à

---

(1) Painlevé, *Sur la théorie de la représentation conforme* (*Comptes rendus Acad. Sc.*, t. CXII, 1891, p. 653).

(2) Carathéodory, *Ueber die gegenseitige Beziehung der Ränder bei der konformen Abbildung des Inneren einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis* (*Math. Annalen*, t. LXXIII, 1913, p. 305) et *Ueber die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete* (*Math. Annalen*, t. LXXIII, 1913, p. 323).

(3) Lindelöf, *Sur un principe général de l'Analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XLVI, n° 4, 1915, p. 1).

tout point accessible Z_0 de la frontière (C) correspond un point (z_0) de (c) tel que $f(z)$ ait pour limite Z_0 lorsque z tend vers z_0 par un chemin quelconque intérieur à (d). On établit en effet que, dans le cas contraire, $f(z)$ aurait pour limite Z_0 sur un arc de (c). C'est l'extension au cas d'un point accessible quelconque, de la méthode que M. Picard a fait connaître pour un point Z_0 commun à deux arcs analytiques distincts de (C) [1]. On déduit de ce qui précède l'étude du cas où tous les points du contour sont accessibles et, en particulier, que la représentation conforme sur un cercle d'un domaine limité par une courbe simple de Jordan est biunivoque et continue, même pour les points frontières.

Le même théorème permet d'examiner la nature de la correspondance entre les points frontières pour les points z_0 de (c) tels que le domaine d'indétermination de $f(z)$, lorsque z tend vers z_0 par des chemins intérieurs à (d), ne se réduise pas à un point. Soit E l'ensemble des valeurs limites obtenues : cet ensemble qui est un continu linéaire est la somme de l'ensemble E_0 des valeurs limites de $f(z)$ sur tout chemin aboutissant en z_0 sans être tangent à (c) et d'un autre ensemble F. Le continu E forme un *bout* de la frontière (C); sur ce bout, les points P_0 de E_0 sont des *points principaux*, et les points de F sont des *points accessoires*. Les premiers se distinguent des autres par la propriété suivante : *il existe une infinité de coupures du domaine* (D) *ayant pour limite le point* P_0 *et dont chacune sépare ce point d'un point fixe arbitrairement choisi à l'intérieur de* (D) [2].

Considérons une suite infinie d'arcs de courbes (l_0), (l_1), ..., (l_n), ..., intérieures à (d), aboutissant en z_0 d'un même côté d'un diamètre passant en ce point et telles que l'ordre de contact de ces courbes et du cercle (c) croisse avec n. Si E_n désigne l'ensemble des valeurs limites de $f(z)$ sur l'arc (l_n), on a les inégalités

$$E_0 \leqq E_1 \leqq E_2 \leqq \ldots \leqq E_n \leqq \ldots.$$

On peut donc dire que : *l'ensemble des valeurs limites de* $f(z)$ *sur*

---

(1) E. Picard, *Cours à la Faculté des Sciences de Paris en* 1888 et *Traité d'Analyse*, 1re édition, t. II, 1893, p. 276.

(2) *Cf.* Carathéodory, *loc. cit.*, et Lindelöf, *loc cit.*

des arcs de courbes aboutissant en z_0 ne décroît jamais quand augmente l'ordre du contact de ces courbes et du cercle.

Les principaux résultats de ce travail ont été énoncés dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, le 4 juin 1917.

CHAPITRE I.

REPRÉSENTATION CONFORME DE L'INTÉRIEUR D'UN DOMAINE SIMPLEMENT CONNEXE SUR L'INTÉRIEUR D'UN CERCLE.

---

1. Considérons une suite infinie de domaines simplement connexes

$$(D_1), \quad (D_2), \quad (D_3), \quad \ldots, \quad (D_n), \quad \ldots;$$

ces domaines sont des ensembles ouverts de points. Les points qui appartiennent à une infinité de domaines (D_i) forment l'ensemble limite complet des ensembles (D_n); les points qui appartiennent à tous les (D_i) à partir d'un certain rang forment l'ensemble limite restreint des ensembles (D_n). Si ces deux ensembles sont identiques, on dit que les ensembles (D_n) ont un ensemble limite qui coïncide avec chacun d'eux.

Les points P qui appartiennent à un ensemble limite, complet ou restreint, sont intérieurs à une infinité de domaines (D_i); pour chacun de ces domaines (D_i), on peut tracer un cercle de centre P et de rayon r_i qui soit tout entier à l'intérieur du domaine (D_i); mais les nombres r_i ne restent pas nécessairement supérieurs à un nombre positif fixe; une infinité d'entre eux peut avoir zéro pour limite, en sorte que les points P ne sont pas uniformément intérieurs aux domaines auxquels ils appartiennent.

Supposons, par exemple, que le domaine (D_n) soit celui d'une ellipse dont les foyers soient les points $+1$ et -1 de l'axe des abscisses OX et dont le petit axe soit égal à $\frac{1}{n}$. L'ensemble limite com-

plet ou restreint se compose du segment $(-1, +1)$ de OX, mais les rayons r_n ont pour limite zéro lorsque n augmente indéfiniment.

Donnons encore un exemple dans lequel l'ensemble limite est un domaine. Dans le carré $0 \leq X \leq 1$, $0 \leq Y \leq 1$, menons les segments parallèles à OY définis de la manière suivante :

$$X = \frac{k}{p_n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p_n - 1),$$
$$0 \leq Y \leq 1 - \frac{1}{p_n},$$

p_n étant le $n^{\text{ième}}$ nombre premier; le domaine simplement connexe (D_n) est formé par les points du carré qui n'appartiennent pas aux côtés ni aux $p_n - 1$ segments précédents. Tous les points du carré appartiennent aux D_n à partir d'un certain rang, car tous les segments sont distincts; mais, pour chacun des points du carré, le rayon r_n a pour limite zéro lorsque n augmente indéfiniment.

Nous sommes ainsi conduits à distinguer les points qui sont *uniformément intérieurs* à une infinité d'ensembles (D_i), c'est-à-dire les points P, centres d'un cercle intérieur à une infinité de domaines (D_i). L'ensemble des points uniformément intérieurs à une infinité d'ensembles (D_i) sera appelé *l'ensemble limite complet intérieur* (D_C); l'ensemble des points uniformément intérieurs à tous les ensembles (D_n) à partir d'un certain rang sera appelé *l'ensemble limite restreint intérieur* (D_R). L'ensemble (D_C) contient l'ensemble (D_R); si ces ensembles sont identiques, ils forment l'*ensemble limite intérieur* (D).

Par exemple, si (D_n) est un cercle de centre O et de rayon $1 + \frac{1}{n}$, l'ensemble (D) est formé par l'intérieur du cercle de centre O et de rayon 1. L'ensemble limite intérieur n'est autre que l'intérieur de l'ensemble limite des (D_n). Mais, dans les exemples donnés plus haut, l'ensemble limite se compose d'un segment ou d'un carré, tandis que l'ensemble limite complet intérieur ne possède aucun point.

3. Nous allons maintenant supposer que les domaines

$$(D_1), \quad (D_2), \quad \ldots, \quad (D_n), \quad \ldots$$

soient *bornés dans leur ensemble*, c'est-à-dire soient tous contenus dans un cercle fixe de centre O et de rayon M. Soit $f_n(z)$ la fonction, supposée exister, qui fait une représentation conforme du cercle (d) du plan des z, de centre o et de rayon 1, sur le domaine (D_n); on a

$$|f_n(z)| < M.$$

Par conséquent, la famille des fonctions

$$(1) \qquad f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots,$$

holomorphes dans le cercle C, est une *famille normale :* de toute suite infinie de fonctions $f_n(z)$, on peut extraire une suite partielle convergeant uniformément dans le domaine (d) vers une fonction holomorphe qui peut être une constante. Soit donc

$$f_{\lambda_1}(z), \quad f_{\lambda_2}(z), \quad \ldots, \quad f_{\lambda_n}(z), \quad \ldots,$$

une suite partielle, extraite de la suite (1), convergeant uniformément vers la fonction limite $f(z)$ et soit (D_f) l'ensemble des points du plan Z qui représentent les valeurs de la fonction $Z = f(z)$. Cette région ne se recouvre pas partiellement; en d'autres termes, si z_1 et z_2 sont deux points différents du cercle (d), on a

$$f(z_1) \neq f(z_2).$$

Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi et que $f(z_1) = f(z_2) = a$ sans que $f(z)$ soit identique à a.

Pour n assez grand, les équations

$$f_{\lambda_n}(z) = a$$

ont au moins une racine voisine de z_1 et une racine voisine de z_2. Si l'on trace deux cercles égaux de centres z_1 et z_2 et dont le rayon est inférieur à la moitié de la distance de z_1 à z_2, lorsque n est assez grand l'équation précédente a une racine z'_1 dans le premier cercle et une racine z'_2 dans le second; les points z'_1 et z'_2 sont donc distincts et l'on aurait

$$f_{\lambda_n}(z'_1) = f_{\lambda_n}(z'_2),$$

ce qui est impossible puisque la fonction $f_{\lambda_n}(z)$ fait la représentation conforme du cercle (d) sur le domaine (D_{λ_n}).

Ainsi, à chaque point de (D_f) ne correspond qu'un point de (d). Je dis que la fonction $f(z)$ fait la représentation conforme de (d) sur (D_f), c'est-à-dire que la dérivée $f'(z)$ ne s'annule pas dans (d). En effet, $f'(z)$ est la limite vers laquelle tend uniformément la suite

$$f'_{\lambda_1}(z), \quad f'_{\lambda_2}(z), \quad \ldots, \quad f'_{\lambda_n}(z), \quad \ldots;$$

et comme $f(z)$ n'est pas une constante, $f'(z)$ n'est pas identiquement nulle. Si l'on avait, pour une valeur z_0 intérieure à C,

$$f'(z_0) = 0,$$

les équations

$$f'_{\lambda_n}(z) = 0$$

auraient, pour n assez grand, au moins une racine voisine de z_0, et, par conséquent, intérieure à (d). Mais cela est impossible parce que, $f_{\lambda_n}(z)$ faisant la représentation conforme de (d) sur le domaine (D_{λ_n}), sa dérivée $f'_{\lambda_n}(z)$ ne peut s'annuler dans (d).

Ainsi, lorsque (D_f) ne se réduit pas à un point, $f(z)$ effectue une représentation conforme de (d) sur (D_f).

Je dis que tous les points de (D_f) appartiennent à l'ensemble limite complet intérieur (D_c) de la famille des domaines (D_n). Soit, en effet, Z_0 un point de (D_f) correspondant au point z_0, intérieur à (d), et traçons un cercle (Γ) de centre Z_0 et de rayon ε tout entier à l'intérieur de (D_f); au cercle (Γ), la transformation $Z = f(z)$ fait correspondre une région intérieure à (d), contenant z_0 et limitée par un contour simple (γ) correspondant à (Γ). Au contour (γ), la fonction $f_{\lambda_n}(z)$ fait correspondre un contour (Γ_n) et, à l'intérieur de (γ), correspond l'intérieur de (Γ_n) : en particulier, à z_0 correspond un point Z_0^n, intérieur à (Γ_n) et défini par la relation

$$Z_0^n = f_{\lambda_n}(z_0).$$

Prenons n assez grand pour que

$$|f(z) - f_{\lambda_n}(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

en tous les points de (γ), contour compris; cela est possible puisque la suite $f_{\lambda_n}(z)$ converge uniformément vers $f(z)$ en tous les points de la région (γ), contour compris. Traçons un cercle (Γ') concentrique à (Γ) de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$. Tous les points de (Γ_n), pour n assez grand, sont extérieurs à (Γ') puisqu'ils sont à une distance inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$ d'un point de (Γ); d'autre part, on a, en faisant $z = z_0$ dans l'inégalité précédente,

$$|Z_0 - Z_0^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{2},$$

donc le point $Z_0^{(n)}$ est à l'intérieur de (Γ') et, par suite, le cercle (Γ') tout entier est intérieur au domaine limité par le contour (Γ_n), et par suite est intérieur à (D_{λ_n}), puisque ce dernier domaine est simplement connexe. Le cercle (Γ') appartient donc à une infinité de domaines (D_{λ_n}) et, par conséquent, le point Z_0 appartient à (D_c).

Nous avons écarté dans ce qui précède le cas où les $f_{\lambda_n}(z)$ ont pour limite une constante, c'est-à-dire le cas où (D_f) se réduit à un point : donnons un exemple de ce dernier cas. Dans un cercle (D) de centre $Z = 0$ et de rayon 1, traçons, sur les rayons faisant avec OX les angles

$$0, \quad \frac{1}{p_n} 2\pi, \quad \frac{2}{p_n} 2\pi, \quad \frac{3}{p_n} 2\pi, \quad \ldots, \quad \frac{p_n - 1}{p_n} 2\pi,$$

p_n désignant le $n^{\text{ième}}$ nombre premier, des segments limités, d'une part à la circonférence de rayon 1, d'autre part à la circonférence de rayon $\frac{1}{p_n}$.

(D_n) est formé par les points de (D) non situés sur ces segments; ici, (D_c) se réduit à zéro. Considérons la suite des fonctions

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots,$$

$f_n(z)$ faisant la représentation conforme de (D_n) sur (d), de manière que $f_n(0) = 0$. On peut extraire des $f_n(z)$ une suite partielle convergeant uniformément. Le domaine (D_f) correspondant ne peut comprendre que des points du cercle (D); si ce domaine ne se réduit pas à un point, ces points de (D_f) appartiendraient à (D_c), ce qui est

impossible. Donc (D_f) se réduit à un point et la suite partielle a pour limite une constante nécessairement nulle puisque $f_n(o) = o$. Il résulte de là que la suite des $f_n(z)$ tout entière converge uniformément vers zéro.

6. Considérons maintenant un point Z_0 appartenant à (D_c) et proposons-nous de rechercher dans quelles conditions ce point fera partie de l'un des domaines (D_f).

Le point Z_0 est le centre d'un cercle (Γ) tout entier intérieur à une infinité de domaines (D_n), que nous appellerons

$$(D_{\mu_1}), \quad (D_{\mu_1}), \quad \ldots, \quad (D_{\mu_n}), \quad \ldots.$$

Soient

$$f_{\mu_1}(z), \quad f_{\mu_2}(z), \quad \ldots, \quad f_{\mu_n}(z), \quad \ldots,$$

les fonctions de la famille $f_n(z)$ qui font la représentation conforme du cercle (d) sur les domaines (D_{μ_n}) et

$$\varphi_{\mu_1}(Z), \quad \varphi_{\mu_2}(Z), \quad \ldots, \quad \varphi_{\mu_n}(Z), \quad \ldots,$$

les fonctions inverses correspondantes. Considérons l'ensemble des points de (d) correspondants à Z_0, c'est-à-dire l'ensemble des points

$$z_{\mu_1} = \varphi_{\mu_1}(Z_0), \qquad z_{\mu_2} = \varphi_{\mu_2}(Z_0), \qquad \ldots \qquad z_{\mu_n} = \varphi_{\mu_n}(Z_0), \qquad \ldots.$$

Ces points sont à l'intérieur de (d); supposons qu'ils aient au moins un point limite z_0 intérieur à (d). Choisissons une suite partielle z_{ν_n} extraite des z_{μ_n} telle que $z_{\nu_n}(Z_0)$ ait pour limite z_0. Nous pourrons, de la suite $f_{\nu_n}(z)$, extraire une suite partielle convergeant uniformément dans (d); soit

$$f_{\lambda_1}(z), \quad f_{\lambda_2}(z), \quad \ldots, \quad f_{\lambda_n}(z), \quad \ldots,$$

cette suite et $f(z)$ la fonction limite supposée non constante. Dans le voisinage de z_0, les équations

$$f_{\lambda_n}(z) = Z_0$$

ont une infinité de racines qui sont les valeurs z_{ν_n} pour n assez grand; comme z_0 est intérieur à (d), il en résulte que

$$f(z_0) = Z_0$$

et le point Z_0 appartient au domaine (D_f). Si $f(z)$ est une constante, cette constante est Z_0 et nous allons montrer que cela est impossible.

Notre raisonnement serait en défaut, si tous les points limites des z_{μ_n} se trouvaient sur la circonférence (c) du cercle (d). Nous allons voir que cela ne peut se présenter que si, pour chaque suite partielle z_{ν_n} de points z_{μ_n} ayant un point limite unique sur (d), ce point demeure le même lorsqu'on remplace les nombres $z_{\nu_n} = \varphi_{\nu_n}(Z_0)$ par les nombres $\varphi_{\nu_n}(Z)$, Z désignant un point du cercle (Γ).

En effet, les fonctions $\varphi_{\mu_n}(Z)$ sont bornées dans leur ensemble lorsque Z est dans (Γ), puisque les points représentant les valeurs de ces fonctions sont situés à l'intérieur de (d).

On peut donc extraire de la suite $\varphi_{\mu_n}(Z)$, une suite partielle

$$\varphi_{\nu_1}(Z), \quad \varphi_{\nu_2}(Z), \quad \ldots, \quad \varphi_{\nu_n}(Z), \quad \ldots$$

convergeant uniformément dans (Γ') concentrique à (Γ) et de rayon moitié, vers une fonction holomorphe $\varphi(Z)$. Si $\varphi(Z)$ n'est pas une constante, les valeurs de cette fonction font la représentation conforme de (Γ') sur un domaine (γ') intérieur au cercle (d). En effet, la convergence uniforme a lieu en tous les points de (Γ'), contour compris, aucun point intérieur de (Γ') ne peut correspondre à un point du contour de (d), puisque les fonctions $\varphi_{\nu_n}(Z)$ ne prennent, dans le voisinage de ce point, aucune valeur représentant un point de (c). Il résulte de là que Z_0, qui est intérieur à (Γ'), correspond à un point z_0, intérieur à (γ') et par conséquent à (d). Dans ce cas, le point Z_0, nous l'avons vu, appartient à un domaine (D_f).

Reste le cas où $\varphi(Z)$ est une constante z_0; si z_0 n'est pas sur (c), cette hypothèse est inadmissible puisque, dans ce cas, les fonctions inverses $f_{\nu_n}(z)$ donnent naissance à une suite partielle ayant une fonction limite non constante $f(z)$, telle que $f(z_0) = Z_0$.

Le seul cas d'exception est donc celui où les fonctions $\varphi_{\nu_n}(Z)$ ont pour limite une constante dont le module est égal à 1. Ce cas ne pourra évidemment se présenter s'il existe dans le cercle (Γ') un point particulier P tel que les points z correspondants soient tous situés à l'intérieur d'un cercle (c') de rayon moindre que 1. Plus généralement, considérons l'ensemble des points Z appartenant au domaine limite complet intérieur de la suite des domaines (D_{μ_n}) et formant un

domaine (Γ) d'un seul tenant contenant Z_0. Si l'on désigne encore par (Γ') un domaine contenant Z_0 et limité par une courbe intérieure au domaine (Γ) et très voisine de sa frontière, (Γ') sera comme (Γ) un domaine d'un seul tenant et simplement connexe comme tous les (D_n). Si les fonctions $\varphi_{\nu_n}(Z)$ n'ont pas pour limite une constante de module égal à l'unité, les points de (Γ') seront obtenus à l'aide d'une suite $f_{\lambda_n}(z)$ et (Γ') appartiendra au domaine (D_f) relatif à cette suite.

Il en sera en particulier toujours ainsi, si le domaine (Γ') contient un point P dont les correspondants z sont intérieurs à un cercle (c') intérieur à (c). Ceci nous conduit à restreindre le choix des fonctions $f_n(z)$.

On peut toujours supposer que les domaines bornés (D_n) ont un point commun $Z = 0$; il suffit de faire subir une translation convenable à ceux des domaines qui ne contiendraient pas le point O. Dans la suite des raisonnements, nous pourrons simplement supposer que les points $\varphi_n(0)$, correspondant à O, sont tous situés à l'intérieur d'un cercle (c') intérieur à (c). Dans ces conditions tout domaine (D_f) contient O et tout domaine simplement connexe (Γ') formé de points uniformément intérieurs à une suite de domaines (D_n) et contenant O appartient à un domaine (D_f). En particulier, appelons (D_0) l'ensemble des points de (D_n) formant un domaine connexe contenant O, ce domaine (D_0) appartient à tout domaine (D_f), puisque toute suite infinie de fonctions $f_n(z)$ donne naissance à une suite partielle convergeant vers une fonction $f(z)$ dont le domaine (D_f) contient O et par suite (D_0).

Supposons que la suite $f_n(z)$ admette une fonction limite $f(z)$ vers laquelle elle converge uniformément, et soit (D_f), le domaine correspondant à $f(z)$, domaine qui contient le point O; tous les points de (D_f) appartiennent à (D_0) et réciproquement; (D_f) coïncide avec (D_0). Il n'existe d'ailleurs pas de domaine $(D\ )$ contenant (D_0) et formé de points uniformément intérieurs à une infinité de domaines (D_n).

Réciproquement, étant donnés les domaines (D_n) et la suite $f_n(z)$, puisque le domaine (D_0) appartient à tous les (D_n), toute suite partielle extraite des $f_n(z)$ donnera naissance à une suite partielle nouvelle dont la limite $f(z)$ fournira un domaine (D_f) contenant (D_0).

D'ailleurs, s'il n'existe pas de domaine (D') contenant (D_0) et formé de points uniformément intérieurs à une infinité de domaines (D_n), tous les domaines (D_f) ainsi obtenus sont les mêmes et, par conséquent, toutes les fonctions $f(z)$ font la représentation conforme du cercle (d) sur le domaine (D_0).

Si en particulier on suppose que les points o et O se correspondent toujours, en sorte que $f_n(o) = 0$, quel que soit n et que les directions positives des axes des abscisses se correspondent, c'est-à-dire que les fonctions $f_n(z)$ ont deux éléments de contacts correspondants, il en résultera que les fonctions $f(z)$ auront aussi en commun cet élément de contact; comme chacune d'elles fait la représentation conforme de (d) sur (D_0), ces fonctions sont identiques. Ainsi, de toute suite infinie extraite des $f_n(z)$, on peut tirer une suite nouvelle ayant pour limite $f(z)$; il en résulte que la suite $f_n(z)$ converge uniformément dans (D) vers $f(z)$.

En effet, dans le cas contraire, il existerait un domaine (D_1) intérieur à (D) et un nombre ε tels que pour chaque fonction d'une suite infinie

$$f_{n_1}(z), \quad f_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad f_{n_p}(z), \quad \ldots$$

extraite de $f_n(z)$, il existerait un point z pour lequel $|f(z) - f_{n_p}(z)| > \varepsilon$. Alors il serait impossible d'extraire de cette suite une suite nouvelle convergeant uniformément vers $f(z)$ dans (D_1).

Un cas assez simple est celui où les ensembles (D_C) et (D_R) coïncident; dans ce cas, l'ensemble (D_0) correspond à une fonction $f(z)$ limite de la suite infinie $f_n(z)$.

7. Je me propose maintenant d'établir que *tout domaine simplement connexe* (D) *peut être représenté d'une manière conforme sur un cercle* (d).

Supposons d'abord que le domaine (D) soit borné et appelons (D') l'ensemble formé par les points de (D) et ses points frontières.

L'ensemble fermé (D') est aussi borné. Soit O un point intérieur à (D). Enfermons tous les points de (D') dans des cercles de rayon égal à $\frac{1}{n}$; il suffit, pour couvrir (D'), d'un nombre fini de ces cercles, puisque (D') est fermé. Supprimons ceux de ces cercles qui contiennent

un point frontière : la région couverte par les cercles conservés forme un ou plusieurs domaines limités par des arcs de cercle et l'un de ces domaines contient O. Appelons (D_n) le domaine simplement connexe limité par le contour extérieur de ce dernier. Je dis que tout point P de (D) est uniformément intérieur aux domaines (D_n) à partir d'un certain rang. En effet, traçons une ligne brisée intérieure à (D) et joignant P et O et soit δ la distance de cette ligne brisée à la frontière de (D). Lorsque $\frac{1}{n} < \frac{\delta}{2}$, le cercle (Γ) de centre P et de rayon $\frac{\delta}{2}$ est intérieur à tous les (D_n); car, si l'on fait déplacer un cercle de rayon $\frac{1}{2}\delta$ de manière que son centre décrive la ligne brisée, ce cercle couvrira une région contenue tout entière dans (D_n). Il résulte de là que tous les points de (D) appartiennent au domaine que nous avons appelé (D_0). D'ailleurs, tout point n'appartenant pas à (D) (extérieur ou frontière), n'appartient à aucun (D_n) à partir d'un certain rang. En résumé, les ensembles (D_C) ou (D_F) coïncident avec (D_0) ou (D).

Soit alors $f_n(z)$, la fonction qui fait la représentation conforme du cercle (d) sur (D_n) de manière que le centre $z = o$ du cercle (d) corresponde au point O et que les directions positives de Ox et OX se correspondent. La suite infinie

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots$$

converge uniformément vers une fonction limite $f(z)$; cette fonction $Z = f(z)$ fait la représentation conforme du cercle (d) sur le domaine (D) de manière que le centre o du cercle (d) corresponde au point O de (D) et que les directions positives de Ox et OX se correspondent. En effet, $f(o)$ est la limite des nombres $f_n(o)$ qui sont nuls ; il est donc nul. D'autre part $f'(z)$ est la limite de $f(z)$; or, tous les nombres $f'_n(o)$ sont réels par hypothèse, donc $f'(o)$ est réel.

8. Nous avons supposé que le domaine (D) était borné. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Deux cas peuvent alors se présenter : ou bien il existe dans le plan Z un point Q extérieur à (D), ou bien tous les points du plan appartiennent à (D) ou à sa frontière, c'est-à-dire appartiennent à (D').

Dans le premier cas, une transformation homographique, effectuée sur la variable Z, permet de remplacer le point Q par le point à l'infini du plan Z et le domaine (D) par un domaine (Δ) borné. Si l'on fait la représentation conforme de (Δ) sur le cercle (d) à l'aide de la fonction $f(z)$, la transformation homographique inverse, effectuée sur $f(z)$, donnera la représentation cherchée.

Supposons maintenant que tous les points du plan appartiennent à (D') et soit O un point de (D). Nous pouvons définir comme précédemment un domaine (D_n) simplement connexe contenant O : nous traçons pour cela autour de chaque point de (D') un cercle de rayon $\frac{1}{n}$, et autour du point à l'infini, que nous pouvons toujours supposer appartenir à la frontière de (D) en faisant, au besoin, une transformation homographique sur Z, un cercle (Γ_n) de rayon n ayant son centre au point O. Les points de (D') intérieurs à (Γ_n) sont intérieurs à un nombre fini des cercles précédents. Supprimons ceux de ces cercles qui contiennent un point frontière : la région couverte par les cercles restants forme un ou plusieurs domaines limités par des arcs de cercle et l'un de ces domaines contient le point O. Appelons (D_n) le domaine simplement connexe limité par le contour extérieur de ce dernier. Tout point de (D) est uniformément intérieur à (D_n) pour n assez grand. Les fonctions $f_n(z)$ sont maintenant holomorphes dans (d), mais non bornées. Prenons sur la frontière de (D) deux points distincts α et β. Les fonctions $f_n(z)$ admettent dans (d) les deux valeurs exceptionnelles α et β ; on peut leur appliquer les théorèmes que nous avons utilisés pour les fonctions bornées [1]; il en résulte que la suite $f_n(z)$ converge uniformément dans (d) vers une fonction limite $f(z)$ qui fait la représentation conforme de (d) sur (D). Ce raisonnement suppose que la frontière de (D) contienne au moins deux points.

En définitive, tout domaine simplement connexe peut être représenté d'une manière conforme sur un cercle.

---

[1] *Voir* P. Montel, *Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXIX, 1912, p. 496) et *Sur les familles normales de fonctions analytiques* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXXIII, 1916, p. 242).

9. Voici quelques exemples; on peut prendre pour D un cercle de centre O dont on a enlevé les points d'un rayon OA; soit encore un cercle de centre O et de rayon *un*; sur chaque rayon faisant avec OX l'angle $\pm \frac{\pi}{n}$ enlevons les points situés sur un segment ayant une extrémité sur la circonférence et l'autre à la distance $\frac{1}{n}$ du point O, enlevons aussi les points situés sur le rayon OX. Le domaine restant (D) peut être représenté sur un cercle.

Faisons dans le plan Z une coupure limitée à deux points A et B distincts quelconques : on peut représenter sur un cercle le domaine restant (D). On suppose, bien entendu, que la coupure ne morcelle pas le plan.

Considérons la courbe de Cornu définie par la relation

$$Z = \int^s e^{is^2}\, ds,$$

s désignant l'arc; un cercle de rayon $\frac{1}{s^3}$ dont le centre est le point $Z(s)$ décrit, lorsque s varie de $-\infty$ à $+\infty$, un domaine simplement connexe que l'on peut représenter sur un cercle. Il en est de même du domaine limité par l'axe OX, les droites $X = \pm 1$ et la courbe $Y = 1 + \sin^2 \frac{\pi}{X}$ avec $-1 \leqq X \leqq +1$.

CHAPITRE II.

VALEURS LIMITES D'UNE FONCTION HOLOMORPHE POUR UN POINT FRONTIÈRE.

---

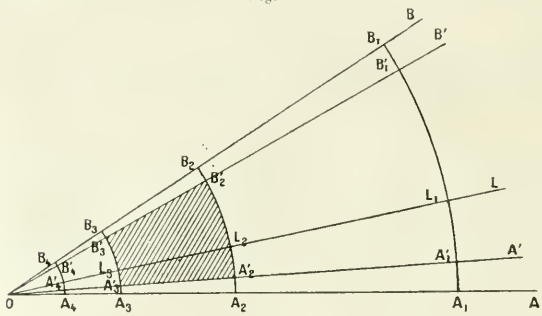
10. Avant d'aborder l'étude de la correspondance entre les points frontières du domaine simplement connexe (D) et ceux de la circonférence (c), je rappellerai quelques résultats que j'ai déjà établis sur les valeurs limites des fonctions dans un angle et je démontrerai quelques résultats nouveaux.

Considérons un angle AOB et une fonction $f(z)$ bornée dans le secteur limité par les côtés OA, OB et l'arc de cercle A_0B_0 de centre O.

Si $f(z)$ tend vers la valeur α sur le rayon OL *intérieur au secteur, $f(z)$ tend uniformément vers α dans tout secteur* A′OB′ *intérieur au premier lorsque z tend vers* 0.

Nous pouvons toujours supposer que $z=0$ au point O et que $OA_0 = OB_0 = 1$. Traçons les arcs de cercle de centre O, de rayons $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}$, etc. Ces arcs coupent la droite OA (*fig.* 1) aux points $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$; la droite OB aux points $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$;

Fig. 1.



les droites OA′ et OB′ respectivement aux points $A'_0, A'_1, \ldots, A'_n, \ldots$, et $B'_0, B'_1, \ldots, B'_n, \ldots$, et la droite OL aux points $L_0, L_1, \ldots, L_n, \ldots$. Appelons Δ_n le domaine limité par les droites OA, OB et les arcs A_nB_n, $A_{n+3}B_{n+3}$ et Δ'_n le domaine limité par les droites OA′, OB′ et les arcs $A_{n+1}B_{n+1}$, $A_{n+2}B_{n+2}$ et posons

$$f_n(z) = f\left(\frac{z}{2^{n-1}}\right).$$

Lorsque z et dans Δ_1, le point $\frac{z}{2^n}$ est situé dans Δ_n et comme $f(z)$ est borné dans le secteur, les fonctions $f_n(z)$ sont bornées dans le domaine Δ_1; ces fonctions forment une suite normale dans le domaine Δ'_1, intérieur à Δ_1. Or, elles convergent vers α en tous les points du segment L_2L_3, puisque $f_n(z)$ prend sur ce segment, les mêmes valeurs que $f(z)$ sur le segment $L_{n+1}L_{n+2}$. Il en résulte que la suite

converge uniformément vers α pour tous les points de Δ_1'. En d'autres termes, pour $n > p$, on aura

$$|f_n(z) - \alpha| < \varepsilon$$

pour tous les points de Δ_1'. Or, si z est dans Δ_1, $|z|$ est inférieur à $\frac{1}{2}$ et $\left|\frac{z}{2^{n-1}}\right|$ est inférieur à $\delta = \frac{1}{2^p}$; donc, si

$$|z| < \delta,$$

on a

$$|f(z) - \alpha| < \varepsilon,$$

à l'intérieur de A′OB′.

11. La démonstration s'étend, presque sans modification, au cas où l'on remplace le rayon OL par une courbe tout entière à l'intérieur de AOB et aboutissant en O ou par un continu quelconque intérieur à AOB et contenant O ; en d'autres termes :

Si, lorsque z tend vers o *en demeurant sur un ensemble parfait continu quelconque contenant* O *et dont tous les points autres que* O *sont intérieurs au secteur, $f(z)$ a pour limite α, $f(z)$ tend uniformément vers α dans tout secteur* A′OB′ *intérieur au premier, lorsque z tend vers* o. *En particulier, le continu peut être une courbe simple* (¹).

Soient OA′ et OB′ deux droites contenues dans le secteur AOB et telles que la courbe ou le continu OL soit à l'intérieur de l'angle A′OB′ lorsque z est dans le secteur A_0OB_0. Supposons par exemple qu'il s'agisse d'une courbe; il existe un arc l_n de cette courbe

(¹) J'ai démontré le théorème relatif au rayon OL dans le Mémoire : *Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine* (*Annales de l'École Normale supérieure*, t. XXIX, 1912, p. 519). Ce théorème a été généralisé par M. Lindelöf en remplaçant la droite OL par une courbe. Voir *Sur un principe général de l'Analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicae*, t. XLVI, 1915, p. 10). M. Lindelöf s'occupe aussi du cas où la courbe OL a des points communs avec OA ou OB. Je laisserai de côté cette hypothèse parce que je n'aurai pas à l'introduire dans la suite.

qui est tout entier dans Δ'_n et dont les extrémités sont l'une sur $A'_{n+1}B'_{n+1}$ et l'autre sur $A_{n+2}B'_{n+2}$. Il suffit pour obtenir un arc tel que l_n de prendre un point de la courbe situé à l'intérieur de Δ_n et de se déplacer successivement dans l'un et l'autre sens sur la courbe jusqu'à ce que l'on rencontre un point L_{n+1} et un point L_{n+2} de la frontière de Δ'_n. Ces points ne pouvant être sur les droites OA' ni OB' sont sur les arcs de cercle précédents. Lorsque z est sur l'arc l_n, le point $2^{n-1}z$ est sur un arc λ_n situé dans Δ'_1 et joignant un point de $A'_2B'_2$ à un point de $A'_3B'_3$. Les arcs λ_n ont pour limite un continu λ, puisque les points limites des λ_n sont au moins au nombre de deux, l'un sur $A'_2B'_2$, l'autre sur $A'_3B'_3$. En tout point z_0 de λ, $f_n(z)$ converge vers α; en effet lorsque n est assez grand, z_0 est voisin d'un point z_n de λ_n tel que

$$|f_n(z_n) - \alpha| < \varepsilon;$$

or, à l'intérieur de Δ'_1, les fonctions $f_n(z)$ sont uniformément continues, on peut donc supposer que z_n est assez voisin de z_0 pour que

$$|f_n(z_0) - f_n(z_n)| < \varepsilon;$$

il en résulte que

$$|f_n(z_0) - \alpha| < 2\varepsilon,$$

quel que soit ε, pour n assez grand. En tout point de λ, qui comprend une infinité de points, la limite de $f_n(z)$ est α; il en résulte comme plus haut que la suite $f_n(z)$ converge uniformément vers α dans Δ'_1 et la conclusion est la même.

On voit que, pour la validité du raisonnement, il suffit que l'ensemble limite λ ait une infinité de points. On peut donc remplacer la courbe OL par un continu quelconque ou même par un ensemble dénombrable convenablement choisi. Dans le cas du continu on prendra, par exemple, pour l_n l'ensemble des points de ce continu contenus dans Δ'_n; l_n a au moins un point sur chaque arc de cercle de centre O et contenu dans Δ'_n, donc λ_n et par suite λ ont au moins un point sur chaque arc de cercle de centre O et contenu dans Δ_1. On aurait pu raisonner de la même manière dans le cas de la courbe.

12. Appelons maintenant *valeur exceptionnelle* de $f(z)$, toute valeur α qui n'est prise qu'un nombre fini de fois par $f(z)$ lorsque z

reste à l'intérieur du secteur A_0OB_0. Supposons que sur un rayon OL contenu dans AOB, l'une des valeurs limites de $f(z)$ soit une valeur exceptionnelle α : je dis que, sur tout autre rayon OL', α sera aussi une valeur limite. En d'autres termes, on peut énoncer le théorème suivant :

L'ensemble des valeurs limites exceptionnelles est le même pour deux rayons issus de O *intérieurs à* AOB *ou pour deux courbes quelconques issues de* O *et contenues dans un secteur* A'OB' *intérieur à* AOB.

Soit, sur le rayon OL, une suite de points

$$z_1, \quad z_2, \quad z_3, \quad \ldots, \quad z_n, \quad \ldots$$

tels que $\lim f(z_n) = \alpha$, α étant une valeur exceptionnelle de $f(z)$. Posons

$$f_n(z) = f\left(\frac{z_n}{z_1} z\right)$$

et traçons un domaine $A_1'B_1'B_1A_1''$ limité, d'une part, par deux rayons OA', OB' intérieurs à AOB, aussi rapprochés qu'on le veut de OA ou de OB et contenant OL et OL'; d'autre part, par deux arcs de cercle de centre O et équidistants de z_1 ; à ce domaine Δ_1, la transformation

$$z' = \frac{z_n}{z_1} z$$

fait correspondre pour le point z' un domaine semblable Δ_n contenant le point z_n, correspondant au point z_1.

Toute suite extraite des $f_n(z)$ donne naissance à une suite partielle ayant une limite $f(z)$ dans Δ_1; $f(z_1)$ est égal à α, puisque $f_n(z_1) = f(z_n)$. Or, α étant une valeur exceptionnelle, les équations $f_n(z) = \alpha$ n'ont qu'un nombre limité de racines dans Δ_1; donc $f(z)$ ne peut prendre la valeur α que si cette fonction est la constante α [1]. Toute suite partielle convergente extraite de la suite $f_n(z)$ a donc pour limite α ; il en

---

[1] *Voir* P. Montel. *Sur les fonctions holomorphes qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine* (*Annales de l'Ecole Normale*, t. XXIX, 1912, p. 490).

résulte que la suite $f_n(z)$ elle-même converge uniformément vers α dans le domaine Δ_1.

Désignons par ζ_1 le point de rencontre de OL′ avec le cercle de centre O et passant par z_1 et soit

$$\zeta_n = \frac{z_n}{z_1}\zeta_1,$$

le point ζ_n, situé sur OL′, est dans le domaine Δ_n et

$$f(\zeta_n) = f_n(\zeta_1);$$

comme la suite $f_n(\zeta_1)$ converge vers α, on voit que la suite $f(\zeta_n)$ converge vers α, lorsque n augmente indéfiniment, ζ_n tendant alors vers o comme z_n.

Soit maintenant OL″ une courbe contenue tout entière dans l'angle A′OB′; désignons par ξ_n le point de rencontre de cette courbe avec le cercle de centre O, passant par z_n, ou l'un des points de rencontre lorsqu'il y en a plus d'un. Le point ξ_n est dans Δ_n et le point

$$z''_n = \frac{z_1}{z_n}\xi_n$$

est situé dans Δ_1; on a d'ailleurs

$$f_n(z''_n) = f(\xi_n).$$

La suite $f_n(z)$ converge uniformément vers α; on a donc, lorsque n est assez grand,

$$|f_n(z) - \alpha| < \varepsilon,$$

quel que soit z dans Δ_1, en particulier,

$$|f_n(z''_n) - \alpha| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$|f(\xi_n) - \alpha| < \varepsilon.$$

La suite $f(\xi_n)$ converge donc vers α, qui est une des valeurs limites exceptionnelles obtenues sur la courbe OL″. Inversement, on démontrerait de la même manière que toute valeur exceptionnelle obtenue comme valeur limite sur la courbe OL″ peut aussi être obtenue comme valeur limite sur le rayon OL.

Il résulte de là que les valeurs limites exceptionnelles sont les mêmes

pour deux courbes contenues dans l'angle A'OB' puisque, pour chacune d'elles, l'ensemble des valeurs limites est le même que pour un rayon OL contenu dans A'OB'. Si une courbe passant par O a une tangente unique, il suffira que cette tangente soit distincte de OA et de OB; sinon, les tangentes en O sont comprises entre deux droites limites et il faudra que l'angle formé par ces droites limites et contenant toutes les tangentes soit intérieur à l'angle AOB. Nous dirons dans les deux cas que la courbe n'est pas tangente au bord de l'angle.

13. Si la fonction $f(z)$ ne prend dans l'angle AOB qu'un nombre limité de fois chaque valeur, toute valeur limite α sera une valeur exceptionnelle; l'ensemble des valeurs limites sera le même que pour toute courbe non tangente au bord. Dans la suite, nous aurons surtout à nous occuper du cas particulier où la fonction ne prend jamais deux fois la même valeur.

14. Je démontrerai encore un théorème relatif aux valeurs exceptionnelles. Supposons que, dans l'angle AOB, $f(z)$ ne tende pas vers une valeur unique α et soient α et β deux valeurs limites. Soient

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots$$

une suite infinie de points tels que $f(x_n)$ ait pour limite α;

$$\zeta_1, \quad \zeta_2, \quad \ldots, \quad \zeta_n, \quad \ldots$$

une suite infinie de points tels que $f(\zeta_n)$ ait pour limite β; nous supposons que les modules r_n des x_n et les modules ρ_n des ζ_n décroissent constamment lorsque n augmente et que la suite des modules

$$r_1, \quad \rho_1, \quad r_2, \quad \rho_2, \quad r_3, \quad \rho_3, \quad \ldots, \quad r_n, \quad \rho_n, \quad \ldots$$

soit aussi décroissante. Cela est toujours possible : ayant choisi x_1, on prend pour ζ_1 un point ζ de module moindre que r_1; puis on prend pour x_2 un des x de module moindre que ρ_1 et ainsi de suite. On peut alors énoncer le théorème suivant :

Le rapport $\frac{\rho_n}{r_n}$ a pour limite o *lorsque n augmente indéfiniment.*

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et qu'il existe une suite infinie

de valeurs de ce rapport telle que tous les nombres de cette suite soient supérieurs à un nombre fixe k; on aura

$$1 > \frac{\rho_{n_i}}{r_{n_i}} > k,$$

pour toutes les valeurs entières de i. Traçons des arcs de cercle limités à OA et OB et de rayons $r_{n_i}(1+h)$, $r_{n_i}(1-h)$; on peut déterminer h de façon que

$$r_{n_i}(1-h) < \rho_{n_i}$$

ou

$$1 - h < \frac{\rho_{n_i}}{r_{n_i}};$$

il suffit pour cela que

$$1 - h < k$$

ou

$$1 > h > 1 - k.$$

Nous prendrons

$$h = 1 - \frac{k}{2}.$$

Considérons alors le domaine D_{n_i} limité par les arcs de cercle $r_{n_i}(1+h)$, $r_{n_i}(1-h)$ et les demi-droites OA′, OB′ intérieures à l'angle AOB. Nous supposons que l'angle A′OB′ contienne les points x_n et ζ_n, au moins à partir d'une certaine valeur de n.

Les fonctions

$$f_{n_i}(z) = f\left(\frac{r_{n_i}}{r_{n_1}} z\right)$$

considérées à l'intérieur de D_{n_i} définissent une famille normale, et toute fonction $f_{n_i}(z)$ prend la valeur $f(x_{n_i})$ au point

$$z = \frac{r_{n_1}}{r_{n_i}} x_{n_i}$$

dont le module est r_{n_1}, et la valeur $f(\zeta_{n_i})$ au point

$$z' = \frac{r_{n_1}}{r_{n_i}} \zeta_{n_i}$$

dont le module ρ' est $\frac{\rho_{n_i}}{r_{n_i}} r_{n_1}$. Ce nombre est supérieur à $k r_{n_1}$; on a donc

$$r_{n_1} - \rho' < (1-k) r_{n_1} < h\, r_{n_1}$$

et le point z' est dans D_{n_1}.

Toute suite infinie de fonctions $f_{n_i}(z)$ devrait donner naissance à une suite convergeant uniformément dans D_{n_i} vers la constante α et vers la constante β, ce qui est impossible. Donc, toutes les suites telles que $\frac{\rho_{n_i}}{r_{n_i}}$ ont pour limite zéro. Le théorème est démontré. On verrait de même que le rapport $\frac{r_{n+1}}{\rho_n}$ a pour limite zéro lorsque n augmente indéfiniment. Il en résulte que le produit $\frac{r_{n+1}}{\rho_n}\frac{\rho_n}{r_n}$ ou $\frac{r_{n+1}}{r_n}$ a aussi pour limite zéro.

Donc : *Si, dans l'angle* AOB, $f(z)$ *n'a pas une limite unique lorsque z tend vers zéro et si $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ forment une suite infinie de points de cet angle tels que $f(x_n)$ ait pour limite une valeur exceptionnelle, et que entre $|x_n|$ et $|x_{n+1}|$ se trouve un des nombres $|\zeta_n|$ pour la suite desquels $f(\zeta_n)$ ait pour limite une autre valeur exceptionnelle β, le rapport $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$ a pour limite zéro lorsque n augmente indéfiniment.*

15. Les propositions que nous venons d'établir sont toutes des conséquences d'un théorème fondamental sur les familles de fonctions normales dans un domaine (D) : toute suite partielle admet au moins une fonction limite vers laquelle elle converge uniformément dans tout domaine (D′) complètement intérieur à (D).

Nous allons maintenant établir un théorème plus précis sur les familles de fonctions normales : cela nous permettra de préciser aussi quelques-uns des résultats des pages précédentes. Voici ce théorème :

Soit

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots$$

une suite infinie de fonctions, holomorphes et bornées dans un domaine (D) *et continues sur un arc $\lambda\mu$ de la frontière* (C) *de ce domaine. Si la suite converge uniformément sur l'arc $\lambda\mu$, elle converge aussi uniformément sur tout domaine* (D′) *dont les points intérieurs sont tous intérieurs à* (D) *et dont la frontière peut contenir une partie $\lambda'\mu'$ de l'arc $\lambda\mu$.*

Nous supposerons ici que l'arc $\lambda\mu$ est analytique et régulier ou formé d'un certain nombre d'arcs réguliers analytiques. Nous verrons plus loin comment on peut se débarrasser de cette restriction.

La démonstration repose sur le lemme suivant :

Si une suite de fonctions, holomorphes et bornées dans un cercle (C) *et continues sur la circonférence converge sur cette circonférence, la convergence étant uniforme, sauf en un nombre fini de points, cette suite converge uniformément dans le domaine fermé formé par le cercle dont on a enlevé des segments aussi petits qu'on le veut contenant les points de convergence non uniforme.*

Soit

$$u_1(x, y), \quad \ldots, \quad u_n(x, y), \quad \ldots$$

la suite formée par les parties réelles des fonctions holomorphes. Les fonctions $u_n(x, y)$ sont bornées dans le cercle (C), continues sur la circonférence, et leurs valeurs $u_n(s)$ sur cette circonférence convergent vers une fonction $u(s)$, qui est continue sur tout arc ne comprenant aucun des points $a_1, a_2, \ldots, a_p$ de convergence non uniforme. La fonction

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_C u(s)\left(\frac{\cos\varphi}{r} - \frac{1}{2R}\right) ds,$$

s désignant l'arc de la circonférence (C) de rayon R, r la distance du point (x, y) au point s, φ l'angle de la normale au point s avec la demi-droite joignant ce point au point (x, y), est une fonction harmonique dans (C) puisque le second membre est l'intégrale de Poisson. On a de même

$$u_n(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_C u_n(s)\left(\frac{\cos\varphi}{r} - \frac{1}{2R}\right) ds$$

et

$$u(x, y) - u_n(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_C [u(s) - u_n(s)]\left(\frac{\cos\varphi}{r} - \frac{1}{2R}\right) ds;$$

d'où

$$|u(x, y) - u_n(x, y)| \leq \frac{1}{\pi}\int_C |u(s) - u_n(s)| \frac{\cos\varphi}{r} ds,$$

car on a toujours

$$r \leqq 2 R \cos \varphi.$$

Divisons le chemin d'intégration en arcs partiels, en marquant p arcs de cercles ayant chacun pour milieu un point $a_1, a_2, \ldots, a_p$ et dont la longueur totale ne dépasse pas ε. Sur ces arcs, la différence

$$|u(s) - u_n(s)|$$

ne dépasse pas $2M$, M désignant la borne supérieure de la valeur absolue des fonctions $u_n(x, y)$ et, sur les arcs restants, cette différence ne dépasse pas ε si n est assez grand. D'autre part, l'intégrale

$$\int \frac{\cos \varphi}{r} ds$$

étendue à un arc quelconque est inférieure à 2π. On a donc

$$|u(x, y) - u_n(x, y)| \leqq \frac{4M\varepsilon}{\delta} + 2\varepsilon \text{ (1)}.$$

Nous désignons par δ la plus courte distance du point (x, y) aux arcs de circonférence, dont les milieux sont $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

La convergence est donc uniforme pour tout point intérieur; comme en un point s de la circonférence, distinct des points a_i, les fonctions $u_n(x, y)$ et $u(x, y)$ sont continues et prennent les valeurs $u_n(s)$ et $u(s)$, on voit que l'on peut adjoindre ce point s aux points de convergence uniforme. Si donc on isole les points a_i, à l'aide de petits segments les contenant, la convergence est uniforme dans le domaine fermé restant. Le même raisonnement *s'applique aux fonctions conjuguées* $v_n(x, y)$, *et par suite aux fonctions données.*

On peut aisément étendre l'énoncé précédent. Le raisonnement repose sur la possibilité d'enfermer les points de convergence non uniforme dans des arcs dont la somme est aussi petite qu'on le veut. Rappelons la définition de ces points. La convergence est uniforme en

---

(1) On pourrait aussi remplacer u et u_n par zéro aux points a_i. Cela ne change pas la valeur des intégrales. On voit aussi *que la suite* $u_n(s)$ *peut ne pas converger aux points* a_i.

un point s de (C), si l'on peut tracer un arc assez petit ayant ce point pour milieu tel que la convergence des fonctions $u_n(s)$ soit uniforme sur cet arc. Dans le cas contraire, le point s est un point de convergence non uniforme. Il résulte immédiatement de cette définition que l'ensemble des points de convergence non uniforme est fermé. S'il est de mesure nulle, on peut enfermer les points de cet ensemble dans des arcs dont la somme des longueurs est aussi petite qu'on le veut. Nous dirons dans ce cas que la convergence est uniforme *presque partout* sur C.

Donc, *si une suite infinie de fonctions, holomorphes et bornées dans un cercle* (C), *converge uniformément presque partout sur la circonférence, cette suite converge uniformément dans le domaine fermé formé par le cercle d'où l'on a exclu, par de petits segments, les points de divergence ou de convergence non uniforme.*

16. Considérons maintenant un domaine simplement connexe limité par un contour formé d'un nombre fini d'arcs réguliers et analytiques et supposons qu'une suite infinie de fonctions holomorphes et bornées dans ce domaine $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., $f_n(z)$, ..., continues sur le contour, converge uniformément sur ce contour, sauf aux points A_1, A_2, ..., A_p. On peut faire la représentation conforme de ce domaine sur un cercle et étendre ainsi le lemme précédent au nouveau domaine.

17. Il est maintenant facile d'établir le théorème énoncé au début. Extrayons de la suite $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., $f_n(z)$, ... une suite partielle

$$f_{n_1}(z), \quad f_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad f_{n_p}(z), \quad \ldots$$

convergente dans le domaine ouvert (D) et convergeant uniformément dans tout domaine complètement intérieur à (D). Cette suite converge uniformément sur l'arc $\lambda\mu$ vers la fonction continue $f(s)$. Soit (D′) un domaine limité par un arc $\lambda'\mu'$ intérieur à $\lambda\mu$ et un arc (C′) dont tous les points, sauf les extrémités λ', μ', sont intérieurs à (D). Soit (D″) un domaine, formé par l'arc $\lambda\mu$ et un arc de courbe (C″) dont tous les points sauf λ, μ sont intérieurs à (D) et contenant à son intérieur les points intérieurs de (D). La suite $f_{n_p}(z)$ converge sur la frontière

de (D'') et la convergence est uniforme, sauf peut-être aux points λ et μ. Il résulte du lemme précédent que la convergence est uniforme dans le domaine fermé (D') et que la fonction limite $f(z)$ prend sur l'arc $\lambda'\mu'$ les valeurs $f(s)$.

Une autre suite partielle convergente extraite des $f_n(z)$ aurait une fonction limite $g(z)$ prenant les mêmes valeurs $f(s)$ sur l'arc $\lambda'\mu'$, de sorte que la fonction $f(z) - g(z)$ holomorphe dans (D') prend, sur l'arc analytique $\lambda\mu$, la valeur zéro. Cette fonction peut donc être prolongée analytiquement au delà de $\lambda'\mu'$ à l'extérieur de (D); elle est donc holomorphe sur $\lambda'\mu'$ et par suite identiquement nulle. Donc $f(z)$ et $g(z)$ sont identiques.

Toute suite convergente extraite des $f_n(z)$ a pour limite la même fonction holomorphe dans (D'). Il en résulte [1] que cette fonction converge uniformément dans le domaine fermé (D') vers une fonction $f(z)$ holomorphe dans (D') et continue sur l'arc $\lambda'\mu'$ où elle prend les valeurs $f(s)$.

18. La démonstration se simplifie lorsque les valeurs $f(z)$ prises sur l'arc analytique $\lambda\mu$ appartiennent à une fonction $\varphi(z)$, analytique de z dans (D) et sur $\lambda\mu$. Il suffit en effet de montrer que toute suite $f_n(z)$ converge dans le domaine (D'') vers une fonction analytique qui prend sur $\lambda\mu$ les valeurs $\varphi(z)$. Or on a

$$f_n(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(C)} \frac{f_n(z)\,dz}{z-x} + \frac{1}{2i\pi}\int_{\lambda\mu} \frac{f_n(z)\,dz}{z-x}.$$

La suite $f_n(z)$ converge dans (D''), la convergence est uniforme sur (C'') sauf peut-être aux extrémités et sur $\lambda\mu$. Comme les $f_n(z)$ sont bornées dans leur ensemble on a, en faisant croître n indéfiniment,

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(C)} \frac{f(z)\,dz}{z-x} + \frac{1}{2i\pi}\int_{\lambda\mu} \frac{\varphi(z)\,dz}{z-x};$$

$f(z)$ étant la limite des $f_n(z)$ dans (D'') et sur (C''). D'ailleurs,

---

[1] *Voir* P. Montel, *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe*, p. 21 (Paris, Gauthier-Villars, 1910).

puisque $\varphi(z)$ est analytique dans le domaine fermé (D'')

$$\varphi(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C''}\frac{\varphi(z)\,dz}{z-x} + \frac{1}{2i\pi}\int_{\lambda\mu}\frac{\varphi(z)\,dz}{z-x},$$

d'où, en retranchant,

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C''}\frac{[f(z)-\varphi(z)]\,dz}{z-x}.$$

Cette formule montre que la différence $f(x) - \varphi(x)$, holomorphe dans (D'') est continue sur l'arc $\lambda'\mu'$ où elle prend la valeur zéro : la différence est donc nulle dans (D'') et $f_n(x)$ converge uniformément dans (D') vers $\varphi(x)$. On peut supposer en particulier que $\varphi(x)$ soit une constante α : ce cas est le seul que nous aurons à considérer dans la suite.

19. Voici maintenant quelques conséquences du théorème qui précède. Supposons que la courbe (C) soit formée par un nombre fini d'arcs réguliers et analytiques et que les fonctions

$$f_1(z),\quad f_2(z),\quad \ldots,\quad f_n(z),\quad \ldots$$

soient holomorphes et bornées dans l'intérieur du domaine simplement connexe (D) limité par le contour (C). Soient encore

$$\lambda_1\mu_1,\quad \lambda_2\mu_2,\quad \ldots,\quad \lambda_n\mu_n,\quad \ldots$$

des coupures simples du domaine (D), joignant deux points λ_n et μ_n de (C). Nous supposons que cette suite de coupures converge uniformément vers un arc $\lambda\mu$ de (C), c'est-à-dire que, étant donné un nombre η arbitrairement petit, à partir d'une certaine valeur de n, l'arc de courbe $\lambda_n\mu_n$ appartienne tout entier au voisinage η de $\lambda\mu$ [1].

Supposons, en outre, que les valeurs de $f_n(z)$ sur l'arc $\lambda_n\mu_n$ convergent uniformément vers un nombre α lorsque n croît indéfiniment : en d'autres termes, si l'on se donne le nombre ε positif, on aura,

---

[1] Le voisinage η de l'arc $\lambda\mu$ est le domaine formé par les points intérieurs à l'un des cercles de rayons η dont le centre est un point de $\lambda\mu$.

pour n assez grand,

$$|f_n(z) - \alpha| < \varepsilon,$$

lorsque z est sur l'arc $\lambda_n \mu_n$.

Dans ces conditions, on peut affirmer que *la suite $f_n(z)$ converge uniformément vers α dans l'intérieur de* (D).

Soit O un point fixe intérieur à (D); à partir d'un certain rang les coupures $\lambda_n \mu_n$ partagent (D) en deux régions dont l'une (D_n) contient le point O. Nous pouvons supposer qu'il en est ainsi à partir de $n = 1$ et nous définissons alors une suite de domaines

$$(D_1), \quad (D_2), \quad \ldots, \quad (D_n), \quad \ldots,$$

(D_n) étant limité par $\lambda_n \mu_n$ et l'arc (γ_n) de la courbe (C) limité aux points $\lambda_n \mu_n$; (D_n) a pour limite (D) lorsque n croît indéfiniment. Soit $\varphi_n(z)$ la fonction qui fait la représentation conforme du domaine (D_n) sur le cercle (d) de rayon *un*, de manière que le point O corresponde au centre o du cercle et le point λ_n à un point a de la circonférence : le point μ_n correspond alors à un point b_n de cette circonférence. L'arc ab_n reste supérieur à une longueur fixe [1].

Appelons $a'b'$ un arc de (d) contenu, quel que soit n, dans ab_n et extrayons de la suite $f_n(z)$ une suite partielle convergeant unifor-

---

[1] Ce point est facile à établir. Posons $\log \varphi_n(z) = U_n + iV_n$; soient de même $\varphi(z)$ et $\log \varphi(z) = U + iV$ les fonctions correspondantes pour le domaine (D); la fonction U_n est nulle sur le contour formé par (γ_n) et $\lambda_n \mu_n$ et négative dans (D_n); la fonction U est nulle sur le contour (C) et négative dans (D); il en résulte que $U - U_n$ est nulle sur (γ_n) et négative sur $\lambda_n \mu_n$, donc $U - U_n < 0$ dans (D_n). En un point de (γ_n) on a donc

$$\frac{dU}{dn} < \frac{dU_n}{dn},$$

en prenant la dérivée normale intérieure, comme le montre immédiatement une figure. Comme

$$\frac{dV_n}{ds} = -\frac{dU_n}{dn},$$

la dérivée $\frac{dV_n}{ds}$ étant prise sur (γ_n) dans le sens direct, on a, en allant de λ_n à μ_n

mément dans l'intérieur de (D), suite que nous appellerons encore

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots.$$

Soit $\Phi_n(z')$ la fonction inverse de $z' = \varphi_n(z)$, posons $F_n(z') = f_n[\Phi_n(z')]$. La suite

$$F_1(z'), \quad F_2(z'), \quad \ldots, \quad F_n(z'), \quad \ldots$$

converge uniformément à l'intérieur de (d). $F_n(z')$ prend, sur ab_n, les mêmes valeurs que $f_n(z)$ prend sur $\lambda_n\mu_n$, donc la suite $F_n(z')$ converge uniformément vers α sur l'arc $a'b'$. Comme ces fonctions sont bornées dans (d), elles convergent uniformément vers α dans l'intérieur de (d) et en particulier au point o. Donc la suite $f_n(z)$ converge vers α au point O et comme ce point est arbitraire dans (D), la suite $f_n(z)$ converge uniformément vers α dans l'intérieur de (D).

D'ailleurs la suite $f_n(z)$ est une suite convergente partielle quelconque extraite de la suite primitive. Puisque toute suite partielle converge uniformément vers α dans (D), il en résulte que la suite primitive converge aussi uniformément dans (D) et le théorème est établi.

20. Supposons en particulier que toutes les fonctions $f_n(z)$ soient identiques entre elles : soit $f(z)$ leur valeur commune ; cette fonction est partout égale à α. En d'autres termes, *si une fonction $f(z)$, holomorphe et bornée dans un domaine, converge uniformément vers α sur des coupures $\lambda_n\mu_n$ ayant pour limite un arc analytique $\lambda\mu$ de la frontière de ce domaine, cette fonction est identique à la constante α.*

---

sur l'arc (γ_n) et en appelant δV_n la variation de V_n,

$$\delta V_n = \int_{\gamma_n)} -\frac{dU_n}{dn}\,ds < \int_{\gamma_n)} -\frac{dU}{dn}\,ds.$$

La dernière intégrale a pour limite δV lorsque n croît indéfiniment : donc l'angle $\widehat{aob_n}$ ou $2\pi - \delta V_n$ est supérieur à $2\pi - \delta V$ ou $\widehat{aob}$, a et b étant les points correspondants aux points λ et μ dans la représentation conforme de (D) sur (d). On voit d'ailleurs aisément que $\widehat{aob_n}$ a pour limite $\widehat{aob}$.

Nous n'avons pas supposé ici que la frontière (C) tout entière est formée d'arcs réguliers et analytiques, car on peut évidemment remplacer une frontière simple par une frontière voisine comprenant l'arc $\lambda\mu$ et un autre arc analytique.

Nous aurons bientôt l'occasion d'appliquer le cas particulier signalé. Voici d'abord des applications du théorème principal et des conséquences précédentes.

21. Considérons de nouveau un angle AOB et une fonction $f(z)$ bornée dans le secteur limité par les côtés OA, OB et l'arc de cercle A_0B_0 de centre O : *Si $f(x)$ tend vers α sur le rayon* OA, *cette fonction tend uniformément vers α dans tout secteur* AOB′, *tel que* OB′ *soit intérieur à* AOB. Reprenons la construction indiquée au paragraphe **10** : nous traçons les arcs de cercles de rayons 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^n}$, $\cdots$, et nous désignons par Δ_n le quadrilatère curviligne $A_nA_{n+3}B_{n+3}B_n$, par Δ'_n le quadrilatère curviligne $A_{n+1}A_{n+2}B'_{n+2}B'_{n+1}$; nous posons encore

$$f_n(z) = f\left(\frac{z}{2^{n-1}}\right).$$

Les fonctions $f_n(z)$ convergent uniformément vers α sur le segment A_1A_4 qui fait partie de la frontière du domaine Δ_1, donc elles convergent uniformément vers α dans le domaine Δ'_1 qui n'a en commun avec la frontière de Δ_1 que les points du segment A_2A_3 intérieur au segment A_1A_4. En d'autres termes, on aura pour $n > p$ et pour tous les points de Δ'_1, frontière comprise,

$$|f_n(z) - \alpha| < \varepsilon.$$

Or, lorsque z est dans Δ'_1, $|z|$ est inférieur à $\frac{1}{2}$ et $\left|\frac{z}{2^{n-1}}\right|$ est inférieur à $\frac{1}{2^p} = \delta$; donc si

$$|z| < \delta,$$

on a

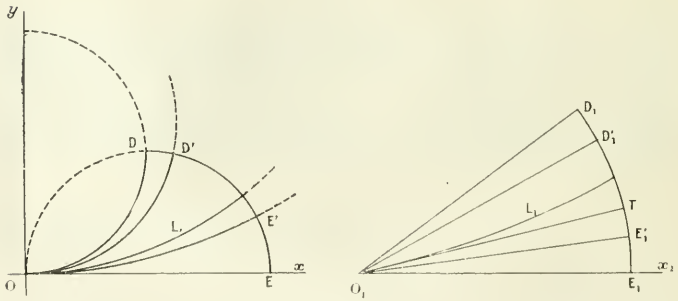
$$|f(z) - \alpha| < \varepsilon,$$

pourvu que z soit dans l'angle AOB′ ou sur les côtés de cet angle.

22. Remplaçons maintenant le rayon OA par une courbe L contenue dans AOB, tangente en O au rayon OA et dont nous supposerons que toute portion ne contenant pas le point O est formée d'un nombre fini d'arcs réguliers et analytiques. Nous définirons, comme au paragraphe **11**, les arcs $L_{n+1}L_{n+2}$ et les arcs λ_n qui leur correspondent par homothétie dans le domaine Δ'_1. Ici encore les deux droites OA et OA′ sont confondues. Les fonctions $f_n(z)$ prennent, sur les arcs λ_n, des valeurs convergeant uniformément vers α; d'autre part, les arcs λ_n convergent uniformément vers le segment A_2A_3; il en résulte que les fonctions $f_n(z)$ convergent uniformément vers α dans le domaine Δ''_n, frontière comprise, ce domaine étant limité par le segment $B'_2B'_3$ de la droite OB′, par les arcs de cercle B'_2A_2, B_3A_3, limités aux points de rencontre avec la courbe λ_n et par cette courbe elle-même. Ce domaine est homothétique du domaine $A_{n+1}A_{n+2}L_{n+2}L_{n+1}$; on en conclut que $f(z)$ converge uniformément vers α dans l'angle formé par la droite OB′ et la courbe L.

23. Étudions maintenant ce qui se passe entre la courbe L et la demi-droite OA. Supposons d'abord que la courbe L ait, au point O,

Fig. 2.



une courbure finie et non nulle; soient ρ et ω les coordonnées polaires d'un point M de L, en prenant OA comme axe polaire Ox; le rayon de courbure en O est la limite R de $\frac{\rho}{2\omega}$ pour ω tendant vers zéro et nous

supposons que R est différent de zéro. Considérons (*fig.* 2) le domaine ODE, limité par Ox, l'arc de cercle OD appartenant à un cercle tangent en O à Ox et de rayon inférieur à R, l'arc de cercle DE appartenant à un cercle quelconque tangent en O à Oy. Nous pouvons toujours supposer, en faisant au besoin une homothétie de centre O, que R est supérieur à $\frac{1}{2}$ et supposer que les arcs OD et DE appartiennent à des cercles de rayon $\frac{1}{2}$.

La transformation conforme

$$z_1 = e^{-\frac{1}{z}}$$

fait correspondre au point (ρ, ω) le point (ρ_1, ω_1) et l'on a

$$\rho_1 = e^{-\frac{\cos\omega}{\rho}},$$
$$\omega_1 = \frac{\sin\omega}{\rho}.$$

Les cercles tangents en O à Ox, pour lesquels $\frac{\sin\omega}{\rho}$ est constant, se transforment en droites issues de la nouvelle origine O_1; les cercles tangents en O à Oy, pour lesquels $\frac{\cos\omega}{\rho}$ est constant, se transforment en cercles de centre O_1. Ox correspond à Ox_1, l'arc OD à un segment O_1D_1 de la demi-droite $\omega_1 = 1$; l'arc DE, à un segment D_1E_1 de la circonférence $\rho_1 = \frac{1}{e}$.

Le triangle curviligne ODE est représenté d'une manière conforme sur le triangle $O_1D_1E_1$ et la courbe L a pour transformée une courbe L_1, tangente en O à une droite O_1T d'argument $\frac{1}{2R} < 1$. Supposons que $f(z)$ ait pour limite α lorsque z tend vers zéro sur la courbe L. La fonction $F(z_1) = f\left(-\frac{1}{\log z_1}\right)$ correspondante tend vers α sur la courbe L_1. On en déduit que $F(z_1)$ tend uniformément vers α dans tout angle $D_1'O_1E_1'$, intérieur à $D_1O_1E_1$, et contenant O_1T; il en résulte que $f(z)$ tend uniformément vers α dans tout domaine D OE' limité par des arcs de cercles tangents en O à Ox et de rayons $R_1 < R < R_2$ arbitrairement choisis.

Si $f(z)$ n'a pas une limite unique, la même transformation prouve que l'ensemble des valeurs limites exceptionnelles est le même pour toute courbe contenue dans la région D'OE'. On a donc la proposition suivante :

Soit L *une courbe intérieure à l'angle* AOB, *tangente en* O *à* OA *et admettant en ce point un rayon de courbure* R *non nul :*

1° *Si $f(z)$ tend vers α sur la courbe* L, *$f(z)$ tend uniformément vers α dans l'angle curviligne* D'O'E' *dont les côtés sont des arcs de cercle tangents en* O *à* OA *et de rayons* R_1 *et* R_2 *tels que* $R_1 > R > R_2$.

2° *L'ensemble des valeurs limites exceptionnelles est le même pour toutes les courbes contenues dans l'angle* D'O'E' *et aboutissant en* O.

24. Supposons maintenant que $R = \infty$ et que la courbe L ait avec OA un contact d'ordre supérieur au premier. Si le contact est d'ordre p, le rapport $\frac{\rho^p}{\omega}$ a une limite finie non nulle. La représentation conforme

$$z_1 = z^p$$

fait correspondre au point (ρ, ω) le point (ρ_1, ω_1) et l'on a

$$\rho_1 = \rho^p, \qquad \omega_1 = p\omega;$$

à la courbe L correspond une courbe L_1 pour laquelle le rapport $\frac{\rho_1}{\omega_1}$ a une limite finie non nulle; cette courbe est tangente en O_1 à O_1x_1 et sa courbure en O_1 n'est ni nulle ni infinie. Nous sommes donc ramenés au cas précédent. Si la courbe L a pour équation

$$\rho^p = a\omega[1 + \varepsilon(\omega)],$$

$\varepsilon(\omega)$ étant infiniment petit avec ω et a une constante positive; le théorème est applicable au domaine curviligne limité par les courbes

$$\rho^p = a_1\omega[1 + \varepsilon_1(\omega)],$$
$$\rho^p = a_2\omega[1 + \varepsilon_2(\omega)],$$

$\varepsilon_1(\omega)$, $\varepsilon_2(\omega)$ étant des infiniment petits avec ω et $a_1 > a > a_2$,

On arriverait aux mêmes résultats si R était nul et si la courbe L avait avec OA un contact d'ordre inférieur à un.

Je laisse de côté le cas où le contact serait d'un ordre non fini [1].

25. Nous avons supposé dans tout ce qui précède que la courbe L avait en O un rayon de courbure déterminé, c'est-à-dire que le rapport $\frac{\rho}{2\omega}$ avait une limite lorsque ω tend vers zéro. Il peut ne pas en être ainsi et ce rapport peut avoir une plus grande limite R_M et une plus petite limite R_m.

Si R_m n'est pas nul ni R_M infini, il n'y a rien à changer aux raisonnements que nous avons faits; il suffit de choisir des cercles de rayons R_1 et R_2 tels que $R_1 > R_M$ et $R_2 < R_m$.

CHAPITRE III.

CORRESPONDANCE ENTRE LES POINTS DES CONTOURS.

---

26. Nous désignerons par (C) la frontière du domaine (D) dont on fait la représentation conforme sur le cercle (d) de rayon un, limité par la circonférence (c). Nous supposons que la représentation fait correspondre à un point O de (D) le centre o de d et que, à une direction donnée partant de O correspond une direction donnée partant de o. Soit

$$Z = f(z),$$

la fonction qui fait cette représentation ; $f(z)$ est holomorphe dans (d) et ne prend pas deux fois la même valeur à l'intérieur de ce cercle. La fonction inverse

$$z = F(Z)$$

---

[1] Quelques cas particuliers des propositions établies ici ont déjà été démontrés par M. Lindelöf [*Sur un principe général de l'Analyse*, etc. (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XLVI, 1915, p. 12)].

est holomorphe dans l'intérieur de (D) et ne prend pas deux fois la même valeur.

Soit $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ une suite infinie de points ayant pour limite un point Z_0 de (C). Tout point limite de la suite $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$ des points correspondants est situé sur (c). Car si un point limite z'_0 était intérieur à (d), il lui correspondrait un point Z'_0 intérieur à (D) qui serait un point limite des Z_n. Inversement, si une suite infinie $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ a pour limite un point z_0 de (c), les points limites de la suite correspondante $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ sont tous sur (C).

27. On dit qu'un point A de (C) est un point *accessible* s'il existe une courbe simple (L) aboutissant en A et dont tous les points, sauf A, sont intérieurs à (D). Cette courbe unit A à un point quelconque intérieur à (D), le point O par exemple. On peut supposer que toute portion OA′ de cette ligne est composée d'un nombre fini de segments rectilignes ou analytiques. Soit, en effet, $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, une suite de points situés sur la ligne simple (L) et ayant A pour seul point limite et supposons que le point A_{n+1} ne soit pas sur l'arc OA_n, quel que soit n. On peut, autour de l'arc OA_1, construire un domaine simplement connexe composé de points intérieurs à (D); on pourra par exemple considérer un cercle dont le rayon ε est inférieur à la distance non nulle de OA_1 et de (C) et dont le centre est sur OA_1 : le domaine balayé par ce cercle sera le domaine cherché. Dans ce domaine, on joindra O à A_1 par une courbe analytique ou une ligne polygonale. On opérera de même sur l'arc A_1A_2, puis sur les arcs $A_2A_3, \ldots, A_nA_{n+1}, \ldots$. La ligne (L′) ainsi obtenue répondra aux conditions imposées.

Tous les points d'une courbe fermée simple (C) ou courbe de Jordan sont accessibles. Mais tous les points frontières d'un domaine ne sont pas accessibles. Cependant, l'ensemble des points accessibles de la frontière (C) d'un domaine est partout dense sur (C). Soit, en effet, B un point quelconque de (C), je dis qu'il existe des points accessibles aussi près que l'on veut de B. Donnons-nous un nombre ε arbitrairement petit; il existe dans le voisinage de B un point B′ intérieur à (D) et dont la distance à B est inférieure à ε. Traçons le cercle de centre B et passant par B′. Les points de (C) situés sur la circon-

férence forment un ensemble fermé et B′ est à l'intérieur d'un arc AA′ contigu à cet ensemble dont les extrémités A et A′ sont des points frontières. Les points A et A′ sont accessibles, puisqu'on peut les réunir au point B′ par des arcs de cercle et leur distance à B est inférieure à ε.

28. Soit A ou Z_0 un point accessible de (C) et (L) une courbe simple aboutissant au point A et dont tous les points, sauf A, sont intérieurs à (D). Lorsque Z décrit (L), le point z décrit une courbe (l). A toute suite infinie de points $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ situés sur (L) et ayant pour limite Z_0, correspond une suite infinie de points $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ situés sur (l) et dont les points limites sont situés sur (c). Je dis que les suites z_n ont un seul point limite z_0. Supposons, en effet, que l'on puisse obtenir deux points limites z_0 et z'_0 sur (c) et correspondant respectivement aux suites $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ et $Z'_1, Z'_2, \ldots, Z'_n, \ldots$. On peut toujours supposer, en supprimant des points, si cela est nécessaire, que, lorsqu'on se déplace sur (L) en allant vers A, les points Z et Z′ sont rencontrés dans l'ordre suivant :

$$Z_1, Z'_1, \quad Z_2, Z'_2, \quad Z_3, Z'_3, \quad \ldots, \quad Z_n, Z'_n, \quad \ldots,$$

et que l'on a, pour toute valeur de n,

$$|z_n - z_0| < \varepsilon, \qquad |z'_n - z'_0| < \varepsilon,$$

ε étant arbitrairement petit et

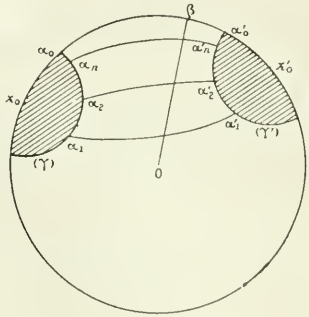
$$z_n = F(Z_n), \qquad z'_n = F(Z'_n).$$

Marquons sur le cercle (c) les points z_0 et z'_0 et traçons les arcs de cercle (γ) et (γ') intérieurs à (d), de centres z_0 et z'_0 et de rayon ε. Quand Z décrit l'arc $Z_1 Z'_1$, z décrit un arc de (l) qui va d'un point du segment hachuré voisin de z_0 à un point du segment hachuré voisin de z'_0; il y a donc un arc $\alpha_1 \alpha'_1$ de la courbe (l) qui joint un point α_1 de l'arc (γ) à un point α'_1 de l'arc (γ'). De même, l'arc $Z_2 Z'_2$ nous donne un arc $\alpha_2 \alpha'_2, \ldots$; l'arc $Z_n Z'_n$ nous donne un arc $\alpha_n \alpha'_n, \ldots$. Deux arcs $\alpha_p \alpha'_p$ et $\alpha_q \alpha'_q$ ne se coupent pas, si l'on a supposé que la courbe (L) ne se coupe pas elle-même. Les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ ont donc pour

limite un point α_0 de (c) situé sur (γ), puisque $f(\alpha_n)$ a pour limite Z_0, comme Z_n et Z'_n. De même $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n, \ldots$ ont pour limite α'_0 sur (c) et (γ').

Toute suite infinie de points $z''_1, z''_2, \ldots, z''_n, \ldots$, telle que z''_n soit sur l'arc $\alpha_n\alpha'_n$ a pour limite un point de l'arc de cercle $\alpha_0\alpha'_0$; en effet, le

Fig. 3.



point Z''_n est situé sur l'arc $Z_nZ'_n$ et a pour limite Z_0. Réciproquement, tout point β de $\alpha_0\alpha'_0$ est un point limite ainsi obtenu; en effet, joignons β au point O par une courbe simple, le rayon $O\beta$ par exemple, ou un arc de cercle. Cette courbe rencontre les arcs $\alpha_n\alpha'_n$ en des points z''_n qui ont nécessairement pour point limite le point β. Il résulte de ce qui précède que les arcs $\alpha_n\alpha'_n$ ont pour limite $\alpha_0\alpha'_0$. La limite est d'ailleurs uniforme : en d'autres termes, traçons le cercle de rayon $1-\varepsilon$, ε étant arbitrairement petit; ce cercle coupe (γ) en un point α voisin de α_0 et (γ') en un point α' voisin de α'_0. Si n est assez grand, $\alpha_n\alpha'_n$ est tout entier à l'intérieur du quadrilatère curviligne $\alpha\alpha_0\alpha'_0\alpha'$, car, s'il en était autrement, il existerait un nombre ε et une infinité de valeurs de n,

$$n_1, \quad n_2, \quad \ldots, \quad n_p, \quad \ldots$$

telles que l'arc $\alpha_n\alpha'_n$ ait un point Z''_{n_p} extérieur au quadrilatère : la suite z''_{n_p} aurait un point limite non situé sur le cercle (c), ce qui est impossible.

Il est donc établi que les arcs $\alpha_n\alpha'_n$ convergent uniformément vers

l'arc $\alpha_0\alpha'_0$. D'autre part, les valeurs de $f(z)$ sur ces arcs convergent uniformément vers la constante Z_0; il en résulterait, d'après le théorème du paragraphe **18**, que $f(z)$ est constante dans (d). On ne peut donc pas supposer qu'il existe deux points z_0 et z'_0. Donc, lorsque Z décrit la courbe (L) et s'approche de Z_0, le point z décrit une courbe (l) qui aboutit à un point unique z_0 du cercle (c). Puisqu'il existe une courbe aboutissant en z_0, sur laquelle $f(z)$ a une limite unique Z_0, on en déduit que $f(z)$ a pour limite Z_0, sur toute courbe intérieure à (d), aboutissant en z_0 et remplissant les conditions indiquées au paragraphe **23**. En particulier, $f(z)$ tend uniformément vers Z_0 dans tout angle de sommet z_0 et dont les côtés sont deux cordes du cercle (d).

Réciproquement, supposons que le point z_0 de (c) soit tel que $f(z)$ ait pour limite la constante Z_0 sur une courbe simple (l) intérieure à (d) et aboutissant en z_0. On sait que $f(z)$ tend alors vers Z_0 sur toute corde du cercle passant par z_0, ou toute courbe simple non tangente en z_0 du cercle et même sur certaines courbes tangentes au cercle en z_0, lorsque la courbe (l) a, avec le cercle (c), un contact d'un ordre déterminé. Je dis que le point Z_0, qui est sur la frontière (C) du domaine (D), est un point accessible. En effet, si z décrit, par exemple, le rayon Oz_0, le point Z décrit une courbe simple aboutissant en Z_0, dont tous les points, sauf Z_0, sont intérieurs à (D). En résumé :

A un point accessible Z_0 de (C) correspond un point z_0 de (c) tel que $f(z)$ ait une limite unique Z_0 lorsque z tend vers z_0 sur un chemin quelconque intérieur à (d) et non tangent à (c). Réciproquement, si $f(z)$ a une limite unique Z_0 quand z tend vers z_0 sur un chemin quelconque intérieur à (d), tangent ou non à (c), Z_0 est un point accessible de (C).

29. Le point z_0 que nous faisons ainsi correspondre à un point Z_0 de (C) à l'aide du chemin (L) est-il déterminé d'une manière unique? En d'autres termes, si nous remplaçons le chemin (L) par un autre chemin (L'), la limite de z sera-t-elle le même point z_0 de la circonférence (c)? Nous pouvons toujours supposer que les chemins (L)

et (L′) partent tous deux de O. Lorsqu'on suit le chemin (L) de O jusqu'à A d'affixe Z_0, le point z décrit une ligne (l) qui part de o et aboutit à z_0; lorsqu'on suit le chemin (L′) de O jusqu'à A, le point z décrit une ligne (l') qui part de o, et aboutit à z'_0. Supposons que z_0 et z'_0 soient distincts, alors les chemins (l) et (l') ont un dernier point commun intérieur lorsqu'on les suit à partir de o et il en est de même des chemins (L) et (L′) suivis à partir de O. On peut d'ailleurs toujours supposer que les chemins (L) et (L′) n'ont d'autres points communs que O et A, car, dans le cas contraire, on fera jouer au dernier point commun intérieur le rôle du point O.

La portion (Δ) du domaine (D) qui est limitée par les courbes (L) et (L′) est représentée d'une manière conforme par $z = F(Z)$, sur la portion (δ) du cercle (d) limitée par (l), (l') et l'arc (λ) d'extrémités z_0 et z'_0. Supposons que (Δ) ne contienne, à son intérieur, aucun point frontière de (D); dans ce cas, lorsque z tend vers un point de (λ), Z tend nécessairement vers Z_0. On en déduirait que $f(z)$ est une constante dans (δ), ce qui est impossible. Donc z_0 et z'_0 coïncident.

Supposons inversement que les points z_0 et z'_0 coïncident. On peut choisir pour (L) et (L′) des lignes polygonales [1], et supposer qu'aucun des points M, où les lignes se traversent, ne soit un sommet de (L) ni de (L′). Soient $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$, les points où se traversent les lignes (L) et (L′). Partons de O; suivons (L) jusqu'au point M_1, puis (L′) entre M_1 et M_2, de nouveau (L) entre M_2 et M_3, etc. Nous définissons ainsi une nouvelle ligne brisée (L_1). On définit de même une ligne brisée (L'_1) en suivant (L′) entre O et M_1, puis (L) entre M_1 et M_2, etc. Nous remplacerons ainsi (L) et (L′) par les deux lignes brisées (L_1), (L'_1) ne se traversant pas. En modifiant un peu ces lignes en leurs points communs, on en déduira deux nouvelles lignes (L_2), (L'_2) sans point commun et allant de O en A. Sur chacune des lignes (L_1), (L'_1), (L_2), (L'_2), la valeur $z = F(Z)$ a une limite unique z_0, lorsque Z tend vers Z_0. Cela résulte immédiatement du

---

[1] Chacune de ces lignes brisées a tous ses points intérieurs à (D), sauf l'extrémité A. Toute portion de chacune de ces lignes, limitée par deux points intérieurs, n'a qu'un nombre fini de côtés. La construction de ces lignes est indiquée au paragraphe 27.

fait qu'il en est ainsi pour (L) et (L′). En résumé, si z_0 et z'_0 coïncident, on peut toujours supposer que (L) et (L′) n'ont d'autres points communs que O et A, car, dans le cas contraire, on remplacerait ces lignes par (L_2) et (L'_2). La fonction $z = F(Z)$ fait la représentation conforme de (Δ) sur (δ) de manière que les points de (L) et (l) d'une part, les points de (L′) et (l') de l'autre, se correspondent. D'ailleurs lorsque z tend vers z_0 sur un chemin quelconque intérieur à (δ), nous savons que Z tend vers la limite unique Z_0. Il en résulte que (Δ) ne contient pas d'autre point frontière que A. Donc :

Pour que deux chemins aboutissant à un même point accessible A *de* (c) *fassent correspondre à* A, *un même point* a *de* (c), *il faut et il suffit que le domaine* (Δ) *limité extérieurement par ces courbes ne contienne que le seul point frontière* A.

30. Dans le cas où il existe deux chemins (L) et (L′) aboutissant en A et limitant un domaine (Δ) contenant un autre point frontière et par conséquent une infinité de tels points, ces deux chemins fournissent deux valeurs limites différentes z_0 et z'_0. Nous conviendrons dans ce cas de dédoubler le point A qui comptera deux fois comme point frontière. D'une manière générale un point A comptera autant de fois qu'il y a de chemins (L′) conduisant à des valeurs z'_0 distinctes de z_0 et distinctes entre elles. Ces différents points A superposés seront, par convention, distincts. Supposons par exemple que (D) soit le domaine formé par les points intérieurs à une circonférence (C) de centre P, exception faite des points du rayon PQ supposé appartenir à la frontière. Chaque point A de PQ, sauf le point P, devra compter pour deux : on pourra imaginer que la frontière PQ est fournie par les deux bords d'une coupure. Soit encore un cercle (C) et le cercle (Γ) tangent intérieurement en un point A de (C) et de rayon moitié de celui de (C). Menons, dans le cercle (Γ), les cordes

$$AB_1,\quad AB'_1;\qquad AB_2,\quad AB'_2;\qquad \ldots,\qquad AB_n,\quad AB'_n;\qquad \ldots,$$

faisant respectivement avec la tangente en A aux deux cercles les

angles

$$+1, \quad -1; \qquad +\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}; \qquad \ldots, \qquad +\frac{1}{n}, \quad -\frac{1}{n}; \qquad \ldots.$$

Le domaine (D) sera formé par les points intérieurs à (C) qui n'appartiennent à aucune de ces cordes. Dans ce cas, le point A doit être compté une infinité de fois sur la frontière (C). Il lui correspond une infinité de points sur la circonférence (c).

31. Il résulte immédiatement de ce qui précède que deux points accessibles distincts Z_0 et Z'_0 ne peuvent fournir le même point z_0 de (c). Nous avons vu, en effet, que dans ce cas, le domaine (Δ) qui correspond à (δ) ne peut contenir qu'un seul point frontière. Donc :

A tout point accessible de la frontière (C) *de* (D) *correspond un point unique de la circonférence* (c). *A deux points accessibles distincts correspondent deux points différents de* (c).

32. Je vais maintenant établir la proposition suivante : soit Z_0 ou A un point accessible de (C) auquel correspond le point z_0 de (c); si une suite infinie de points $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p, \ldots$ a pour limite unique Z_0, la suite des points correspondants $z_1, z_2, \ldots, z_p, \ldots$ a pour limite unique z_0. Nous supposons essentiellement que le point Z_0 n'est pas compté plusieurs fois sur la frontière ou que, s'il en est ainsi, on peut enfermer les points Z_p, sauf un nombre fini d'entre eux, dans un domaine (Δ) formé de points intérieurs à (D) et du seul point frontière Z_0.

Soit (L) une ligne polygonale joignant O à A à l'aide de points intérieurs à (D) [et intérieure à (Δ) si c'est nécessaire]. Traçons le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{n}$ (n entier). Soit A_n le dernier point de rencontre de (L) et de la circonférence, lorsqu'on se déplace de O vers A. Le point A_n intérieur à (D) appartient à un arc $B_nA_nB'_n$ de la circonférence dont les points intérieurs sont intérieurs à (D) et les extrémités B_n, B'_n appartiennent à la frontière (C). Les points B_n et B'_n sont accessibles et il leur correspond sur (c) les points b_n, b'_n ; à l'arc de cercle $B_nA_nB'_n$ correspond un arc de courbe (λ_n) dont les

points intérieurs sont intérieurs à (d). La coupure $B_n A_n B'_n$ partage le domaine (D) en deux domaines simplement connexes (D_1) et (D_2). Le domaine (D_1) contient A sur sa frontière et ne contient pas O; le domaine (D_2) contient O dans son intérieur. Cela résulte aussitôt du fait que la courbe (L) partie du point O de (D_2), ne peut plus rentrer dans ce domaine à partir du point A_n, puisqu'elle ne rencontre plus l'arc $B_n B'_n$ et qu'elle n'a, avec la frontière de (D), d'autre point commun que le point A. La coupure (λ_n) partage le cercle (d) en deux domaines simplement connexes (d_1) et (d_2). Le domaine (d_1) contient a et ne contient pas o. Le domaine (d_2) contient o et ne contient pas a.

En donnant à n toutes les valeurs entières, nous définissons ainsi une suite infinie de coupures (λ_1), (λ_2), ..., (λ_n), ... Chacune d'elles entoure les suivantes. En effet, les coupures (λ_n) et (λ_{n+1}) ne se coupent pas dans (d) puisqu'elles correspondent à des arcs de cercles concentriques et de rayons $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n+1}$. Comme les domaines (d_1) qui leur correspondent contiennent tous deux a, il en résulte que (λ_n) entoure (λ_{n+1}). Je dis que (λ_n) a pour limite le point a lorsque n croît indéfiniment. En effet, s'il n'en était pas ainsi, (λ_n) aurait pour limite un arc (λ_0) de la circonférence (c). Or on a, sur (λ_n),

$$|f(z) - Z_0| = \frac{1}{n};$$

donc, $f(z)$ aurait pour limite Z_0, uniformément, quand les coupures s'approcheraient de (λ_0). Cela est impossible, puisque $f(z)$ n'est pas constant.

Soit alors la suite Z_1, Z_2, ..., Z_p, ... admettant l'unique point limite Z_0 ou A. Pour chaque valeur de n, ces points, sauf un nombre fini d'entre eux, sont contenus dans (D_1); donc les points z_1, z_2, ..., z_p, ... sont contenus dans (d_1), sauf un nombre fini d'entre eux, et comme le domaine (d_1) se réduit à la limite au point z_0 ou a, il en résulte que la suite z_p a pour limite a.

35. Voici une conséquence immédiate de la proposition précédente : supposons que les points accessibles Z_0, Z'_0, Z''_0, ..., Z^{n}_0, ...

aient pour limite le point accessible Z_0; je dis que les points correspondants z_0', z_0'', z_0''', ..., z_0^{n}, ... ont pour limite le point z_0, correspondant à Z_0. Soit, en effet, ζ_0 un point limite de l'ensemble des points $z_0^{(n)}$. D'après ce qui précède, on peut choisir Z_n tel que ce point soit à une distance de $Z_0^{(n)}$ inférieure à $\frac{1}{n}$ et que le point correspondant z_n soit à une distance de $z_0^{(n)}$ inférieure aussi à $\frac{1}{n}$. Les points Z_n ont pour limite Z_0 et les points z_n ont pour limite ζ_0. D'après la proposition précédente, ζ_0 coïncide avec z_0. Comme ce raisonnement s'applique à tout point limite des $z_0^{(n)}$, la suite infinie de ces points a pour unique limite z_0.

Sur l'ensemble des points accessibles, z_0 est une fonction continue de Z_0.

34. Supposons que la courbe (C) qui limite le domaine (D) soit une courbe simple de Jordan. Tous les points Z_0 de cette courbe sont accessibles et lorsque Z_0 parcourt (C), z_0 est une fonction continue de Z_0. On peut représenter les affixes Z_0 des points de (C) par la formule $Z_0 = \varphi(\theta)$, θ étant un nombre réel qui varie de 0 à 2π; on a $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$ et les valeurs de $\varphi(\theta)$ pour deux valeurs quelconques de θ intérieures à l'intervalle $(0, 2\pi)$ sont distinctes. La fonction $\varphi(\theta)$ est une fonction continue de son argument puisque (C) est une courbe de Jordan. Le nombre z_0 est une fonction continue de Z_0, donc de θ et par suite, puisque $|z_0| = 1$, l'argument ψ de z_0 est une fonction continue de θ, $\psi(\theta)$. Cette fonction varie toujours dans le même sens de $\psi_1 = \psi(0)$ à $\psi_2 = \psi(2\pi)$; en effet, dans le cas contraire, ψ prendrait la même valeur pour deux valeurs distinctes θ' et θ'' et un même point z_0 correspondrait à deux points Z_0' et Z_0'' de (C). Pour la même raison l'arc $\psi_1\psi_2$ n'est pas supérieur à une circonférence. Il n'est pas inférieur non plus à une circonférence, car il y aurait un arc de la circonférence (c) qui ne serait pas parcourue par z_0. Or, lorsque z s'approche d'un point de cet arc, Z admet au moins un point limite sur (C) et ce point, étant accessible d'une seule manière, correspond à un point unique de (c). L'arc $\psi_1\psi_2$ couvre donc toute la circonférence (c); en d'autres termes $|\psi_2 - \psi_1| = 2\pi$. Donc Z est, inversement, une fonction continue de z.

Ainsi, *lorsqu'un domaine* (D) *est limité par une courbe simple de Jordan, on peut faire la représentation conforme de ce domaine sur un cercle* (d) *de manière qu'à un élément de contact intérieur à* (D) *corresponde un élément de contact intérieur à* (d). *Les frontières des deux domaines se correspondent alors d'une manière univoque et continue.*

La démonstration de ce théorème fait simplement appel aux théorèmes classiques sur les fonctions analytiques.

35. Revenons au cas où la frontière (C) est quelconque. Le mode de raisonnement du paragraphe **32** a montré que si l'on a une suite infinie d'arcs simples $(\Lambda_1), (\Lambda_2), \ldots, (\Lambda_n), \ldots$, formant coupures pour (D) et ayant pour limite le seul point frontière Z_0, les arcs correspondants $(\lambda_1), (\lambda_2), \ldots, (\lambda_n), \ldots$ ont pour limites des points et non des arcs de (c), c'est-à-dire que, de toute suite infinie d'arcs, extraite des (λ_n), on peut extraire une suite nouvelle ayant pour limite un point z_0.

Soit z_0, un point quelconque de (c), et une suite infinie de points z ayant pour unique point limite z_0. On peut extraire de cette suite, une suite nouvelle $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ telle que la suite $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ ait un seul point limite Z_0 sur (C). Nous pouvons, comme au paragraphe **32**, tracer des arcs de cercles (Λ_n) passant par Z_n et formant coupures pour (D). Les arcs de courbes correspondants ont pour unique point limite z_0, puisque l'arc (λ_n) passe par le point z_n et que la suite z_n a pour unique limite z_0. Les extrémités B_n, B'_n des coupures (Λ_n) sont des points accessibles de (C), donc les points b_n, b'_n correspondent à des points accessibles. Le point z_0 est un point limite de points correspondants à des points accessibles. Comme z_0 est arbitraire sur (c), on voit que l'ensemble des points z_0 correspondant à des points accessibles est partout dense sur (c).

36. Appelons E le domaine d'indétermination de $f(z)$ au point z_0, pour les valeurs de z intérieures à (d). Nous pouvons obtenir cet ensemble en traçant des cercles de centre z_0 et de rayons indéfiniment décroissants. L'ensemble E est la limite des domaines formés par les valeurs de $f(z)$ pour chacun des domaines intérieurs à la fois à (d) et à ces cercles. E est un ensemble continu formé de points frontières

de (C). Nous l'appellerons un *bout* de cette frontière. Soit $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ une suite de points intérieurs à (d), ayant z_0 pour limite et tels que les valeurs Z_n correspondantes aient une limite unique Z'_0.

Supposons que l'on puisse tracer une infinité d'arcs de cercle (Λ_n) ayant leur centre en Z_0, de rayons indéfiniment décroissants, tels que chacun d'eux forme coupure pour (D) de manière que la portion (D_2) du domaine (D), qui ne contient pas O et qui est obtenue à l'aide de (Λ_n), contienne une infinité de points Z_n. Le point Z_0 est alors appelé, par M. Carathéodory, *point principal* du bout E. Un point Z_0 appartenant à E qui ne possède pas cette propriété sera appelé un *point accessoire* du bout E.

Pour le point principal Z_0, aux coupures (Λ_n) correspondent des arcs de courbes (λ_n) ayant pour limite z_0. En effet, (λ_n) est une coupure pour (d) et la portion (d_1) de (d), qui ne contient pas o, contient une infinité de points z_n et par suite z_0. Les différents domaines (d_1) sont emboîtés les uns dans les autres et ont pour limite z_0.

Menons, dans le cercle (d), le rayon oz_0. Ce rayon rencontre la courbe (λ_n) au moins en un point z'_n. La suite des points z'_n a pour limite z_0, tandis que la suite des valeurs $Z'_n = f(z'_n)$ a pour limite Z'_0. Ainsi, l'affixe Z_0 d'un point principal relatif à z_0 est une des valeurs limites de $f(z)$ sur le rayon oz_0.

37. Réciproquement, toute valeur Z_0, limite d'une suite infinie des valeurs de $f(z)$ sur le rayon oz_0 est un point principal. Cette réciproque a été établie par M. Lindelöf [1]. Je vais en donner une démonstration reposant sur les principes que nous avons utilisés dans ce travail.

Menons deux cordes z_0A et z_0B du cercle (d) également inclinées sur le rayon oz_0. Nous savons que dans l'angle $\widehat{Az_0B}$, l'ensemble des valeurs limites de $f(z)$ est le même sur toute courbe aboutissant en o. Soit Z_0 une des valeurs limites de $f(z)$ sur le rayon. Nous avons vu que l'on peut, par des arcs de cercles de centre o, découper dans l'angle $\widehat{Az_0B}$ des quadrilatères curvilignes semblables tels que $f(z)$

[1] *Sur un principe général de l'Analyse*, etc., p. 28.

converge uniformément vers Z'_0 à l'intérieur de ces quadrilatères. Il en résulte immédiatement que l'on peut tracer, à l'intérieur de ces quadrilatères, une suite infinie de cercles (μ_1), (μ'_2), ..., (μ'_n), ..., homothétiques par rapport à z_0, dont les centres z'_1, z'_2, ..., z'_n, ... sont sur le rayon oz_0 et tels que, à l'intérieur du cercle (μ'_n), on ait

$$|f(z) - Z'_0| < \varepsilon_n,$$

la suite décroissante ε_1, ε_2, ..., ε_n, ... ayant pour limite zéro.

La suite Z'_1, Z'_2, ..., Z'_n, ..., correspondant à z'_1, z'_2, ..., z'_n, ..., a pour limite le point Z'_0 de (C). Il faut démontrer que Z'_0 est un point principal. Admettons qu'il n'en soit pas ainsi, c'est-à-dire qu'il soit impossible de trouver une infinité d'arcs de cercles de centre Z'_0, de rayons indéfiniment décroissants, formant coupures pour (D) et tels que chacun d'eux sépare O d'une infinité de points Z'_n. Il en résulte que lorsque le rayon d'un cercle (Γ) de centre Z_0 est assez petit, aucune des coupures, en nombre fini ou infini, formées par les arcs de ce cercle ne possède la propriété précédente. Soit ρ le rayon de l'un de ces cercles; les points de (C) situés sur la circonférence forment un ensemble fermé et nous désignerons par (Σ_1), (Σ_2), ..., (Σ_n), ..., les arcs de cercle contigus à cet ensemble. A ces arcs de cercles correspondent des arcs de courbes (σ_1), (σ_2), ..., (σ_n), ... Puisque les arcs (Σ_n) appartiennent au cercle (Γ), aucun des arcs (σ_n) ne sépare o de z_0. D'ailleurs, aucun des arcs (σ_n) n'est fermé : chacun d'eux aboutit en deux points de la circonférence (c) correspondant aux extrémités accessibles de l'arc (Σ_n) correspondant à (σ_n).

Pour cette suite (σ_n), les ensembles limites se réduisent tous à des points, car s'il n'en était pas ainsi, on pourrait extraire de la suite (σ_n) une nouvelle suite (σ'_n) admettant comme limite les points d'un arc (σ) de la circonférence (c). Les arcs de cercle (Σ'_n) correspondants sont des arcs contigus à l'ensemble fermé des points de (C) situés sur le cercle (Γ). On peut extraire de la suite (Σ'_n), une suite nouvelle (Σ''_n) ayant pour limite un point unique Z_0 de (C) situé sur la circonférence (Γ). Les courbes (σ''_n) correspondantes ont encore (σ) pour limite et, z étant pris sur ces courbes, $f(z)$ a pour limite la constante Z_0. Nous savons que cela est impossible si (σ) ne se réduit pas à un point.

Appelons domaine (σ_n) celui des deux domaines en lesquels (d) est partagé par la coupure (σ_n), qui ne contient pas o. Il résulte de ce qui précède que, si p est un point quelconque intérieur à (d), il n'y a qu'un nombre fini de domaines (σ_n) contenant le point p.

Prenons ε_1 inférieur à ρ : je dis que le cercle (μ'_1) est tout entier à l'intérieur d'un domaine (σ_n). En effet, le centre z'_1 est à l'intérieur de l'un de ces domaines : supposons en effet le contraire, et traçons le cercle (c') de centre o et passant par z'_1. Il n'y a qu'un nombre fini d'arcs (σ_n) rencontrant ce cercle et aucun des domaines (σ_n) correspondant ne contient z'_1 par hypothèse. On peut donc tracer un chemin l joignant o à z'_1 et ne rencontrant aucune courbe (σ_n). La courbe (L) correspondante joint alors les deux points O et Z_1 et ne rencontre aucun arc (Σ_n); elle ne rencontre donc pas le cercle (Γ). Mais Z'_1 est à l'intérieur du cercle puisque $|Z_0 - Z'_1| < \varepsilon_1 < \rho$ et O est, par hypothèse, à l'extérieur de (Γ); il y a donc contradiction et z'_1 appartient à un domaine (σ_n) que nous appellerons (σ'_1). Le point z'_1 est d'ailleurs à l'intérieur du domaine puisque sur l'arc (σ'_1), on a $|Z - Z_0| = \rho > \varepsilon_1$. D'ailleurs, le cercle (μ'_1) est tout entier à l'intérieur de (σ'_1), car s'il en sortait, il y aurait un point de ce cercle sur la frontière (σ_1) [puisque les points de (μ_1) sont tous intérieurs à (d)], et cela est impossible pour la même raison que pour le point z'_1.

Le cercle (μ'_1) est donc tout entier à l'intérieur du domaine (σ'_1). Par hypothèse, le domaine (σ'_1) ne contient pas z_0; il y a, par suite, sur le rayon Oz_0, des points z'_n et des cercles (μ'_n) extérieurs à ce domaine (σ'_1). Nous pouvons toujours supposer que (μ'_2) est le premier de ces cercles en supprimant, s'il le faut, des cercles intermédiaires. Le cercle (μ'_2) est alors intérieur à un domaine (σ'_2) *nécessairement distinct* de (σ'_1) et ainsi de suite. Nous définirons une suite infinie de domaines distincts

$$(\sigma'_1), \quad (\sigma'_2), \quad \ldots, \quad (\sigma'_n), \quad \ldots,$$

tels que le domaine (σ'_n) contienne (μ'_n) tout entier à son intérieur. De la suite (σ'_n) extrayons une suite (σ''_n) telle que les arcs de cercle correspondants (Σ''_n) aient une limite unique Z_0. Nous aurons alors une suite de domaines

$$(\sigma''_1), \quad (\sigma''_2), \quad \ldots, \quad (\sigma''_n), \quad \ldots$$

contenant respectivement les cercles

$$(\mu_1''), \quad (\mu_2''), \quad \ldots, \quad (\mu_n''), \quad \ldots$$

à leur intérieur et tels que lorsque z est sur l'arc (σ_n), $f(z)$ tende uniformément vers Z_0.

Je dis qu'un tel résultat est impossible. Par une homothétie de centre z_0 amenons tous les cercles (μ_n''), qui sont homothétiques par rapport à z_0, à coïncider avec un même cercle (μ) de centre o. Ce cercle (μ) sera intérieur à tous les domaines (s_n) résultant par homothétie des domaines (σ_n''). Appelons a_n et b_n les deux points de la frontière de (s_n) qui correspondent aux deux points de rencontre de l'arc (σ_n'') avec le cercle (c); l'arc de cercle $a_n b_n$ correspondra à l'arc du cercle (c) qui fait partie de la frontière du domaine (σ_n'').

Faisons maintenant la représentation conforme du domaine (s_n) sur le cercle (γ) de rayon 1 du plan des ζ de manière que les points a_n et b_n correspondent à deux points α et β pris sur la circonférence (γ). Soit $z = \varphi_n(\zeta)$ la fonction qui fait cette représentation et ζ_n le point correspondant à $z = 0$. Je dis que tous les points ζ_n sont complètement intérieurs à (γ), c'est-à-dire qu'aucun point limite des ζ_n n'est sur la circonférence (γ). Dans le cas contraire, nous pourrions trouver une suite infinie $\zeta_{p_1}, \zeta_{p_2}, \ldots, \zeta_{p_n}, \ldots$, extraite des ζ_n et telle que ζ_{p_n} ait pour limite un point ζ de la circonférence (γ). Des fonctions $\varphi_{p_n}(\zeta)$ correspondantes, on peut extraire une suite $\varphi_{q_n}(\zeta)$ ayant pour limite une fonction $\varphi(\zeta)$, laquelle fait la représentation conforme de l'intérieur de (γ) sur un domaine (s) formé des points complètement intérieurs aux (s_{q_n}). Le point o appartient nécessairement au domaine (s) puisque les cercles (μ) sont intérieurs à tous les (s_n); il lui correspond, à l'aide de la fonction $\varphi(\zeta)$, un point ζ_0 intérieur au cercle (γ). Il en résulte que les points ζ_{q_n} qui font partie de la suite ζ_{p_n} auraient pour limite ζ_0 et non ζ. Cette contradiction établit notre proposition.

Considérons maintenant la fonction $f(z) - Z_0 = g(z)$ qui prend sur les arcs (σ_n''), des valeurs dont le module tend vers zéro quand n augmente indéfiniment. Par les transformations précédentes, il lui correspond des fonctions $h_n(\zeta)$ qui, sur l'un des arcs $\alpha\beta$, prennent des valeurs de module indéfiniment décroissant. Comme les $h_n(\zeta)$ sont bornées

dans (γ), il en résulte que $h_n(\zeta)$ a pour limite zéro dans tout domaine intérieur à (γ) et cette limite est atteinte uniformément. Enfermons les points ζ_n dans un tel domaine, on voit que $h_n(\zeta_n)$ a pour limite zéro; mais $h_n(\zeta_n)$ a la même valeur que $g(z)$ au point z'_n, c'est-à-dire $f(z'_n) - Z_0$ ou $Z'_n - Z_0$. Ainsi $Z'_n - Z_0$ tendrait vers zéro; mais ce nombre a pour limite $Z'_0 - Z_0$; il en résulterait que cette limite est nulle, ce qui est impossible puisque son module est égal à ρ.

La proposition est démontrée : Z'_0 est un point principal.

58. Soient A et B, deux valeurs limites sur le rayon Oz_0 et les suites de nombres

$$z'_1, \quad z'_2, \quad \ldots, \quad z'_n, \quad \ldots,$$
$$z''_1, \quad z''_2, \quad \ldots, \quad z''_n, \quad \ldots,$$

ayant respectivement pour limite A et B. Appelons ρ_n la distance $z_0 z'_n$ et r_n la distance $z_0 z''_n$. Nous supposons que la suite

$$r_1, \quad \rho_1, \quad r_2, \quad \rho_2, \quad \ldots, \quad r_n, \quad \rho_n, \quad \ldots$$

soit décroissante. Nous avons vu au paragraphe **14** que le rapport $\frac{\rho_n}{r_n}$ a pour limite zéro quand n croît indéfiniment. Par chacun des points z'_n ou z''_n passe une coupure (λ'_n) ou (λ''_n) séparant le point z_0 du point o : on peut donner de la remarque qui précède un énoncé ne faisant intervenir que ces coupures [1], mais ce dernier énoncé n'est que l'application au cas qui nous occupe de la proposition générale établie au paragraphe **14**.

59. Nous avons vu que l'ensemble des valeurs limites de $f(z)$, au point P, d'affixe z_0, est le même sur toute corde issue de z_0 et plus généralement sur toute courbe passant en z_0 et non tangente à la circonférence en ce point. Appelons E_0 l'ensemble des valeurs limites ainsi obtenues et F l'ensemble des valeurs limites de $f(z)$ qui ne sont pas obtenues sur le rayon. On a

$$E = E_0 + F.$$

---

[1] *Cf.* Lindelöf, *Sur un principe général de l'Analyse*, etc., p. 32.

E_0 est l'ensemble des affixes des points principaux relatifs à z_0; F est l'ensemble des affixes des points accessoires. En particulier, E_0 peut se réduire à un point unique Z'_0 qui est alors accessible.

40. Soit $l_0, l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$ une suite infinie d'arcs de courbes intérieures à (d) et dont les contacts avec le cercle (c) au point P sont respectivement d'ordre 0, 1, 2, ..., n, ... Soient $E_0, E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ les ensembles formés par les valeurs limites de $f(z)$ sur ces arcs de courbes que nous supposons situés d'un même côté du diamètre du cercle passant en P.

L'ensemble des valeurs limites de $f(z)$ sur les arcs $l_0, l_1, \ldots, l_n, \ldots$, ne décroît jamais lorsque l'ordre du contact augmente; en d'autres termes, on a les inégalités :

$$E_0 \supseteq E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots \supseteq E_n \ldots.$$

Nous pouvons, par une première représentation conforme, remplacer le cercle (d) par le demi-plan situé au dessus de la tangente Px à ce cercle, le point P coïncidant avec son homologue; les courbes $l_0, l_1, \ldots, l_n, \ldots$ deviennent des courbes $l'_0, l'_1, \ldots, l'_n, \ldots$ ayant avec Px des contacts d'ordres 0, 1, 2, ..., n, ... Soit (δ') le domaine limité par un cercle tangent en P à Px et laissant l_1 à son extérieur, la droite Px elle-même et un arc de cercle normal à Px au point P. Ce domaine est un triangle curviligne que l'on peut, par la transformation conforme du paragraphe **25**, remplacer par un secteur circulaire (δ'') de centre P dont un des rayons sera Px. Les courbes $l'_1, l'_2, \ldots, l'_n, \ldots$ deviennent des courbes $l''_1, l''_2, \ldots, l''_n, \ldots$, et la courbe l''_1 n'est pas tangente à Px. Soit $F(\zeta)$, la fonction déduite de $f(z)$ par la représentation conforme qui substitue au plan des Z, le plan des ζ où est tracé le secteur (δ''). Les valeurs limites de $F(\zeta)$ sur l''_1 sont celles de E_1. Les points correspondants du plan des Z sont principaux pour le domaine (Δ) homologue de (δ''). Il y a des courbes σ''_n, tracées dans (δ''), séparant P du bord circulaire du secteur et se réduisant à la limite à P, sur lesquelles $F(\zeta)$ a pour limite une valeur Z_1 de E_1.

Comme $l''_2, l''_3, \ldots, l''_n, \ldots$ rencontrent ces courbes, la valeur Z_1 fait partie des ensembles $E_2, E_3, \ldots, E_n, \ldots$.

On raisonnerait de même en partant d'une courbe l_n et en opérant les transformations indiquées aux paragraphes **23** et **24**. Par conséquent, une valeur limite obtenue sur une courbe ayant en P un contact déterminé avec (c), sera obtenue aussi sur tout arc dont le contact en P est d'ordre supérieur à celui de la première courbe.

Mouvements algébriques dans le plan;

PAR J.-A. BARRAU,

à Gröningen.

1. La position d'un *plan mobile* (x, y) dans un *plan fixe* (X, Y) est donnée par

$$X = xc + ys + a, \tag{1}$$

$$Y = xs + yc + b, \tag{2}$$

où

$$c = \cos\varphi, \qquad s = \sin\varphi;$$

donc

$$c^2 + s^2 = 1. \tag{3}$$

Un mouvement est déterminé si s et c, satisfaisant toujours la condition (3), a et b sont connues en fonction du temps t, ou, après élimination de t, c'est-à-dire passant de la cinématique à la géométrie cinématique, si s, c, a, b parcourent une suite continue de valeurs qu'on peut supposer donnée par deux nouvelles relations :

$$f_1(c, s, a, b) = 0, \tag{4}$$

$$f_2(c, s, a, b) = 0. \tag{5}$$

La trajectoire

$$F(X, Y) = 0$$

du point

$$x = x_1, \qquad y = y_1$$

du plan mobile dans le plan fixe est obtenue par l'élimination de c, s, a, b dans les équations (1), (2), (3), (4), (5).

On peut considérer la suite de valeurs en question comme une

courbe dans un espace à quatre dimensions, l'*espace cinématique*, en prenant c, s, a, b comme coordonnées par rapport à un système orthogonal OC, OS, OA, OB. Cette courbe sera l'intersection des trois hypersurfaces (3), (4), (5), dont (3) est la même pour chaque mouvement. L'étude des mouvements dans le plan revient donc à celle des *courbes représentantes* qu'on peut tracer dans cette hypersurface

$$c^2 + s^2 = 1,$$

que nous appellerons le *bicylindre cinématique*.

Si f_1 et f_2 sont algébriques, leur intersection avec le bicylindre sera algébrique et les trajectoires de tous les points deviendront aussi algébriques. Si cette intersection dégénère, chaque courbe partielle sera la représentante d'un mouvement algébrique correspondant : *la classification des mouvements algébriques dans le plan équivaut à celle des courbes algébriques situées dans le bicylindre cinématique.*

2. Le bicylindre cinématique peut être regardé comme un *bicône*, dont la *droite-sommet*, commune à tous les *plans générateurs*, est la droite à l'infini $A_\infty B_\infty$ du plan axial OAB. Chaque plan générateur contient un point du *cercle directeur*

$$c^2 + s^2 = 1,$$

situé dans OCS.

La section de l'espace à l'infini avec le bicylindre est composée de deux plans générateurs passant par les points cycliques de OCS.

La section avec un espace linéaire ordinaire E_3 est :

Un couple de plans, réels, imaginaires ou confondus, si E_3 passe par $A_\infty B_\infty$;

Un cylindre de révolution, si E_3 passe par $C_\infty B_\infty$;

Un cylindre elliptique dans le cas général.

Une section plane est :

La droite $A_\infty B_\infty$ comptée double, si le plan contient cette droite ;

Un couple de droites, réelles, imaginaires ou confondues, si le plan a un point commun avec $A_\infty B_\infty$;

Un cercle, si le plan passe soit par $C_\infty S_\infty$, soit par une autre droite

à l'infini qui est *parallèle de Clifford* avec $A_\infty B_\infty$ par rapport à la quadrique absolue à l'infini

$$c^2 + s^2 + a^2 + b^2 = 0;$$

une ellipse dans le cas général.

Pour reconnaître le cas circulaire, remarquons que $A_\infty B_\infty$ et $C_\infty S_\infty$ sont réciproques polaires par rapport à la quadrique absolue; elles sont donc un couple d'arêtes opposées d'un tétraèdre dont les deux autres couples d'arêtes sont génératrices des deux réglées de la quadrique.

Les droites d'une congruence linéaire appuyées sur un de ces derniers couples composent un système de parallèles de Clifford, auquel appartiennent, dans les deux cas, $A_\infty B_\infty$ et $C_\infty S_\infty$. Or, un plan ayant comme droite à l'infini une telle parallèle donne une intersection avec le bicylindre cinématique contenant les points d'appui de cette parallèle, c'est-à-dire les points cycliques du plan; cette intersection est donc un cercle.

Chacun des deux systèmes de plans à section circulaire est *isogonal*, cela veut dire que les deux angles de position formés par deux plans quelconques du système sont égaux.

Les équations des plans des deux systèmes peuvent être mises sous la forme :

$$\left.\begin{aligned} Pc + Qs + Ra + Sb &= \text{const.} \\ Qc - Ps - Sa + Rb &= \text{const.} \end{aligned}\right\} \text{ système } \textit{droit}$$

et

$$\left.\begin{aligned} Pc + Qs + Ra + Sb &= \text{const.} \\ Qc - Ps + Sa - Rb &= \text{const.} \end{aligned}\right\} \text{ système } \textit{gauche}.$$

5. En appliquant des transformations de coordonnées, toujours cartésiennes, dans le plan mobile ainsi que dans le plan fixe, on peut décrire un même mouvement par une infinité de systèmes d'équations (1), ..., (5), donc de courbes représentantes.

Posons dans le plan mobile :

$$x = \xi\gamma_1 + \eta\sigma_1 + \alpha_1, \qquad y = -\xi\sigma_1 + \eta\gamma_1 + \beta_1$$

et dans le plan fixe

$$\Xi = X\gamma_2 + Y\sigma_2 + \alpha_2, \qquad \Pi = -X\sigma_2 + Y\gamma_2 + \beta_2,$$

où

$$\gamma_1^2 + \sigma_1^2 = \gamma_2^2 + \sigma_2^2 = 1.$$

Nous obtiendrons les équations nouvelles :

$$(1) \qquad \Xi = \xi\gamma + \eta\sigma + \alpha,$$
$$(2) \qquad \Pi = -\xi\sigma + \eta\gamma + \beta,$$
$$(3) \qquad \gamma^2 + \sigma^2 = 1,$$
$$(4) \qquad \varphi_1(\gamma, \sigma, \alpha, \beta) = 0,$$
$$(5) \qquad \varphi_2(\gamma, \sigma, \alpha, \beta) = 0,$$

où γ, σ, α, β et c, s, a, b sont liées par la transformation linéaire :

$$\gamma = (\gamma_1\gamma_2 - \sigma_1\sigma_2)c - (\sigma_1\gamma_2 + \gamma_1\sigma_2)s,$$
$$\sigma = (\sigma_1\gamma_2 + \gamma_1\sigma_2)c + (\gamma_1\gamma_2 - \sigma_1\sigma_2)s,$$
$$\alpha = (\alpha_1\gamma_2 + \beta_1\sigma_2)c + (\beta_1\gamma_2 - \alpha_1\sigma_2)s + \gamma_2 a + \sigma_2 b + \alpha_2,$$
$$\beta = (\beta_1\gamma_2 - \alpha_1\sigma_2)c - (\alpha_1\gamma_2 + \beta_1\sigma_2)s - \sigma_2 a + \gamma_2 b + \beta_2.$$

Ces transformations, disons *transformations cinématiques*, constituent un groupe de collinéations à quatre paramètres de l'espace cinématique, qui laisse invariant :

L'infini ;

Le bicylindre cinématique et en particulier son plan axial ;

Le système droit des plans isogonaux avec le plan axial, donc des sections circulaires droites.

Les collinéations du groupe ne sont pas, en général, orthogonales ; elles le sont en particulier pour $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. Mais rien n'empêche de considérer de nouveau, après une transformation, γ, σ, α, β comme coordonnées orthogonales dans un autre espace cinématique.

Les transformations cinématiques n'affectent pas les propriétés projectives de la courbe représentative, ni sa position projective par rapport aux figures invariantes nommées ci-dessus.

4. *Le degré de chaque trajectoire dans un mouvement algébrique est égal au degré d'une courbe représentante.*

En effet, ce degré est le nombre des points d'intersection de la trajectoire

$$F(X, Y) = 0$$

avec une droite quelconque

$$PX + QY + R = 0$$

ou

$$P(x_1 c + y_1 s + a) + Q(-x_1 s + y_1 c + b) + R = 0.$$

Cette équation représente un espace linéaire (hyperplan) qui a n points en commun avec la courbe représentante, supposée du degré n. Il n'y a que ces n solutions (c, s, a, b) qui indiquent une position du plan mobile pour laquelle le point (x_1, y_1) tombe dans la droite choisie dans le plan fixe.

3. *Le nombre des points doubles de chaque trajectoire est égal au nombre de points doubles réels et apparents d'une courbe représentante.*

Un point double dans la représentante correspond à deux positions identiques du plan mobile, les trajectoires de tous ses points présentent donc *à la fois* un point double.

Si le point singulier de la représentante est un rebroussement, les trajectoires montreront à la fois un rebroussement.

Pour les points doubles des trajectoires ne provenant pas de positions identiques, on aura

$$X = c_1 x + s_1 y + a_1 = c_2 x + s_2 y + a_2,$$
$$Y = -s_1 x + c_1 y + b_1 = -s_2 x + c_1 y + b_2$$

ou

$$(c_1 - c_2).x + (s_1 - s_2).y + (a_1 - a_2).1 + (b_1 - b_2).0 = 0,$$
$$(c_1 - c_2).y - (s_1 - s_2).x + (a_1 - a_2).0 + (b_1 - b_2).1 = 0.$$

Les quantités $(c_1 - c_2)$, $(s_1 - s_2)$, $(a_1 - a_2)$, $(b_1 - b_2)$ sont proportionnelles aux cosinus directeurs de la *corde* de la courbe représentante par les points $(c_1 s_1 a_1 b_1)$ et $(c_2 s_2 a_2 b_2)$. Cette corde doit donc être perpendiculaire aux directions de O à $(x_1, y_1, 1, 0)$ et à $(y_1, -x_1, 0, 1)$, donc au plan contenant ces droites. Ce plan est un « isogonal du système droit » au plan OAB; un second plan absolu-

ment perpendiculaire à ce premier appartient encore au même système. La corde doit être parallèle à ce second plan, c'est-à-dire qu'elle doit rencontrer la droite à l'infini de ce plan, laquelle est parallèle de Clifford de $A_\infty B_\infty$ et complètement déterminée par le point (x_1, y_1) du plan mobile dans la trajectoire duquel on cherche les points doubles. Le nombre de ces points doubles égale le nombre de cordes qui rencontrent la droite à l'infini en question, c'est ce que par analogie nous devons appeler le *nombre des points doubles apparents* de la représentante. Si cette courbe est de triple courbure, non contenue dans un hyperplan, ce nombre n'est autre que le degré de l'espace courbe, lieu des cordes. Si la représentante est de double courbure, ce lieu devient une congruence et les points doubles apparents recouvrent leur sens ordinaire, projetés du centre où, dans le cas général, l'espace linéaire contenant la courbe est rencontré par la parallèle de Clifford en question.

6. Les points doubles de la seconde catégorie dans les trajectoires seront des *points de rebroussement* quand la corde devient tangente. Mais le lieu des points (x, y) du plan mobile dont les trajectoires possèdent un tel rebroussement est la *courbe polaire mobile* du mouvement. Nous obtenons donc la relation géométrique suivante entre la courbe représentante et la courbe polaire mobile :

L'intersection de la surface des tangentes de la représentante avec l'espace à l'infini est une courbe, plane ou tordue, dont chaque point porte une parallèle de Clifford du système droit, l'ensemble desquelles est une surface réglée. La polaire réciproque de cette surface par rapport à la quadrique absolue est une autre surface réglée formée de parallèles du système droit. L'intersection de celle-ci avec le plan à l'infini $b = 0$ est une courbe plane collinéaire à la courbe polaire mobile.

On peut aussi projeter la première surface réglée du centre B_∞ sur le plan $C_\infty S_\infty A_\infty$; le contour apparent sera corrélatif à la courbe polaire.

7. Le mouvement *inverse* ou *indirect* d'un mouvement donné est

déterminé par

$$x = Xc - Ys - ac + bs,$$
$$y = Xs + Yc - as - bc,$$

avec les mêmes équations (3), (4), (5).

On peut écrire aussi

$$(1) \qquad x = XC + YS + A,$$
$$(2) \qquad y = -XS + YC + B,$$
$$(3) \qquad C^2 + S^2 = 1,$$
$$(4) \qquad F_1(C, S, A, B) = 0,$$
$$(5) \qquad F_2(C, S, A, B) = 0,$$

où C, S, A, B et c, s, a, b sont liées par les relations

$$C = c, \qquad S = -s, \qquad A = -ac + bs, \qquad B = -as - bc.$$

Ces relations caractérisent une transformation quadratique, birationnelle et involutive de l'espace cinématique, convertissant la courbe représentante du mouvement direct en celle du mouvement indirect, qui est, en général, du degré double.

La transformation devient linéaire pour

$$c = c_1, \qquad s = s_1 \qquad (\text{n}^\circ\ \mathbf{10})$$

ou

$$a = 0, \qquad b = 0 \qquad (\text{n}^\circ\ \mathbf{11})$$

8. La conception même du mouvement indirect comporte, pour les courbes enveloppes des droites du plan mobile, des propriétés en dualisme avec celles des trajectoires du mouvement indirect (Chasles).

Indiquant une droite du plan mobile par les coordonnées tangentielles homogènes

$$u = y_1 - y_2, \qquad v = -(x_1 - x_2), \qquad w = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

on trouve

$$U = cu + sv,$$
$$V = -su + cv,$$
$$W = (-ac + bs)u - (as + bc)v + w.$$

Les formules inverses sont, conformément au n° **7**,

$$u = cU - sV,$$
$$v = sU + cV,$$
$$w = aU + bV + W.$$

Ces formules, jointes aux équations (3), (4), (5) du n° **1**, c'est-à-dire à la connaissance de la représentante, donnent les enveloppes de droites dans les mouvements direct et indirect.

9. Les formules des n^{os} **1** et **8** nous permettent de déterminer la courbe représentante dans les cas où, soit deux points du plan mobile sont contraints à parcourir des trajectoires prescrites (qui peuvent coïncider), soit deux droites à décrire des enveloppes voulues (éventuellement confondues), soit un point à parcourir une courbe, tandis qu'une droite glisse le long d'une autre (laquelle encore peut être la même).

Si le point (x_1, y_1) doit suivre la trajectoire

$$f(X, Y) = 0,$$

on aura

$$f[(x_1 c + y_1 s + a),\quad (-x_1 s + y c + b)] = 0$$

ou

$$f_1(c, s, a, b) = 0.$$

Une hypersurface de ce type est un bicylindre du degré de f, dont la droite-sommet à l'infini satisfait aux équations

$$x_1 c + y_1 s + a = 0,$$
$$y_1 c - x_1 s + b = 0;$$

elle est donc une parallèle de Clifford de $A_z B_z$ du système droit. En opérant avec la droite-sommet selon le n° **5**, on voit que chaque plan générateur du bicylindre contient des cordes dont les points d'appui sont les intersections du plan avec la courbe représentante. Tous les points de la trajectoire du point (x_1, y_1) sont donc multiples; tandis que les trajectoires générales sont parcourues une seule fois, celle du point (x_1, y_1) est parcourue, soit réellement, soit imaginairement, autant de fois qu'est le quotient du degré de f dans celui de la représentante.

Si la droite (u_1, v_1, w_1) doit envelopper la courbe

$$\psi(U, V, W) = 0,$$

on aura

$$\psi\{(cu_1 + sv_1), (-su_1 + cv_1), [(-ac + bs)u_1 - (as + bc)v_1 + w_1]\} = 0$$

ou

$$f_2(c, s, a, b) = 0.$$

Cette hypersurface est la transformée selon le n° **7** d'un bicylindre du type précédent.

Plusieurs mouvements d'application technique entrent dans la catégorie de ce paragraphe ; il va sans dire que dans un exemple spécial on pourra profiter d'un choix convenable des axes de coordonnées.

10. Une première classe de mouvements algébriques, bien triviaux du reste, est caractérisée par les représentantes qui sont *courbes planes dans un plan générateur* du bicylindre cinématique.

On a alors

$$c = c_1, \qquad s = s_1, \qquad f(a, b) = 0.$$

Il n'y a pas de rotation, le mouvement est *parallèle*, toutes les trajectoires sont congruentes à celle de l'origine du plan mobile, qui est

$$f(X, Y) = 0.$$

La *translation* est le cas plus simple, dont la représentante est une droite.

Les mouvements indirects sont du même type (n° **7**).

11. La deuxième classe comprend deux types de mouvement, bien connus encore, correspondant aux *sections planes* du bicylindre cinématique.

La représentante est *circulaire du système droit* (n° **2**), quand f_1 et f_2 sont de la forme

$$Pc + Qs + Ra + Sb + T_1 = 0,$$
$$Qc - Ps - Sa + Rb + T_2 = 0.$$

Divisant par $\sqrt{R^2 + S^2}$, nous obtenons

$$P'c + Q's + R'a + S'b + T'_1 = 0,$$
$$Q'c - P's - S'a + R'b + T'_2 = 0.$$

Mais alors, eu égard aux formules du n° **5**, en posant

$$\alpha_1\gamma_2 + \beta_1\sigma_2 = P', \qquad \beta_1\gamma_2 - \alpha_1\sigma_2 = Q',$$
$$\gamma_2 = R', \qquad \sigma_2 = S',$$
$$\alpha_2 = T'_1, \qquad \beta_2 = T'_2,$$

on peut toujours transformer en

$$f_1 \equiv \alpha = 0, \qquad f_2 \equiv \beta = 0.$$

Cela veut dire que la nouvelle origine du plan mobile ($\xi = 0$, $\eta = 0$) reste à sa place ($\Xi = 0$, $H = 0$), le mouvement est une *rotation*. Le mouvement inverse est aussi une rotation (n° **7**).

Quand la représentante est *circulaire gauche* ou *elliptique*, f_1 et f_2 sont des hyperplans dont le plan commun n'est pas isogonal droit avec OAB. Ce plan porte un faisceau d'espaces linéaires, dont chacun peut être regardé comme un bicylindre projetant de degré *un* dans le sens du n° **9**. Il y a donc une infinité de points qui décrivent une droite, parcourue deux fois, puisque les trajectoires générales sont du second degré, notamment des ellipses. On reconnaît le *mouvement elliptique;* le lieu des points à trajectoire droite est, comme on sait et comme le raisonnement du n° **6** le confirme, une circonférence. Le mouvement est complètement déterminé par *trois* positions du plan mobile, puisque les trois points correspondants, s'ils ne sont pas en ligne droite, déterminent le plan de la représentante. Le mouvement inverse tombe sous le type du n° **17**.

12. Les représentantes des mouvements de la troisième classe sont des *courbes à double courbure*, situées dans *un* espace linéaire. Cet espace étant un bicylindre du premier degré dans le sens du n° **9**, il existe *un seul point du plan mobile qui décrit une trajectoire droite*.

Inversement, tous les mouvements à *un entraînement droit* seront représentés par une courbe hyperplane.

Par une transformation du n° 3, l'équation de l'espace linéaire peut être ramenée à

$$b = 0,$$

les équations (1), ..., (5) devenant *quatre :*

$$\begin{aligned} X &= xc + ys + a, \\ Y &= -xs + yc, \\ c^2 &+ s^2 = 1. \\ f_1(c, s, a) &= 0. \end{aligned}$$

L'origine du plan mobile décrit la droite

$$Y = 0.$$

L'espace cinématique devient tridimensional, le bicylindre cinématique un cylindre de révolution ordinaire ; *il y a autant de types de mouvements d'un entraînement droit qu'il y a de types de courbes non planes sur un cylindre ordinaire.*

Il existera :

Un mouvement cubique, la trajectoire générale est une cubique à point double (n° 3);

Un mouvement biquadratique avec trajectoire du quatrième degré à deux points doubles;

Un mouvement biquadratique avec position double, les trajectoires ont trois points doubles, dont un de première espèce;

Un mouvement biquadratique avec position de rebroussement, les trajectoires ont deux points doubles et un rebroussement (de première espèce);

Et ainsi de suite.

Si les points d'une courbe représentante admettent une construction par les méthodes de la géométrie descriptive ordinaire (comme c'est le cas avec les mouvements mentionnés ci-dessus), ces points pourront être transmis dans une seconde épure comme positions du plan mobile, a étant l'abscisse de l'origine

$$\varphi = \operatorname{arc\,tang} \frac{s}{c}$$

donnant l'orientation de l'axe OX de ce plan. Ce procédé permet

de traiter, à titre d'exercices, une assez grande variété de mouvements par le dessin seul. On trouvera facilement la solution par construction des problèmes rattachés : tangentes aux trajectoires, courbes polaires, points doubles des trajectoires, etc.

13. Le *mouvement cubique* est déterminé par cinq positions arbitraires du plan mobile. Pour exécuter la construction, on transmet ces positions sur le cylindre cinématique; la cubique gauche représentante est déterminée par les cinq points correspondants et le sommet à l'infini et peut être construite selon la méthode bien connue.

Les équations (1), ..., (5) du mouvement pourront toujours être transformées à

$$\begin{aligned} X &= \quad xc + ys + a, \\ Y &= -xs + yc, \\ c^2 &+ s^2 = 1, \\ ac &+ s = 1 \end{aligned}$$

ou, sous forme paramétrique,

$$c = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad s = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad a = t.$$

Pour la courbe polaire mobile, on trouve une *parabole*

$$y^2 - 2x - 1 = 0.$$

Les formules du n° **7** donnent le mouvement inverse, on trouve qu'il est cubique aussi, la courbe polaire fixe est une parabole égale à la première, les sommets des deux paraboles doivent correspondre. Le foyer d'une parabole décrit la directrice de l'autre et inversement; cette propriété peut servir à déterminer le mouvement.

Le mouvement cubique peut être regardé comme le premier terme d'une série de mouvements algébriques, sortant généralement de notre troisième classe, dont la courbe polaire mobile est symétrique à la courbe polaire fixe et roule sur celle-ci de manière à être toujours sa réflexion dans une tangente commune. Une trajectoire est alors le lieu des réflexions d'un point du plan fixe dans les tangentes, elle est homothétique à échelle double de la podaire de ce point par rapport à la

polaire fixe. Ses propriétés projectives sont donc déductibles de celles de la courbe polaire; les foyers décrivent toujours des trajectoires plus simples.

Pour ces mouvements on peut donc, en appliquant en sens inverse les n^{os} **4**, **5**, **6**, déterminer d'avance le caractère géométrique de la courbe représentante (exemple au n° **17**).

14. Sans entamer l'étude détaillée de tous les cas spéciaux contenus dans les trois types de mouvement biquadratique, nous en voulons signaler deux qui renferment comme exemples particuliers des mouvements connus.

Un mouvement à un entraînement droit peut jouir en outre de la propriété qu'une droite du plan mobile passe toujours par un point fixe. Le mouvement indirect sera alors du même type que le direct : nous dirons *mouvement paraconchoïdal*.

Selon le n° **7**, la courbe représentante du mouvement inverse devra être située dans un hyperplan

$$PC + QS + RA + TB + V = 0$$

où, puisque $b = 0$,

$$C = c, \qquad S = -s, \qquad A = -ac, \qquad B = -as.$$

Donc

$$Pc - Qs - Rac - Tas + V = 0$$

ou

$$a(Rc + Ts) - Pc + Qs - V = 0.$$

Par une transformation convenable, on peut ramener cette équation à

$$ac + s = \text{const.} + p.$$

Le point $(x = 0, y = 0)$ parcourt la droite $Y = 0$, tandis que la droite $x = -p$ passe toujours par le point $(X = 0, Y = 1)$.

Les deux courbes polaires sont en général de même type, l'équation de la polaire mobile est

$$(y^2 - px)^2 = x^2 + y^2.$$

Dans le cas particulier $p = 1$, la représentante dégénère en une droite et une cubique (n° **15**), le mouvement est cubique.

Un autre cas particulier est

$$p = 0,$$

donc

$$ac + s = 0.$$

Cette équation représente le *mouvement conchoïdal* ordinaire; l'équation de son mouvement inverse, mouvement *contraconchoïdal*, peut être ramenée à la forme

$$ac + 1 = 0.$$

On sait qu'une courbe polaire devient doublement symétrique,

$$y^4 = x^2 + y^2,$$

tandis que l'autre est une parabole.

Les représentantes de tous ces mouvements possèdent un point double en A_z, les mouvements eux-mêmes auront une position double à l'infini qui causera un point double à l'infini dans toutes les trajectoires en dehors des deux points doubles ordinaires (type biquadratique 2 du n° **12**).

15. Un mouvement biquadratique peut montrer, outre son entraînement droit nécessaire, un *entraînement quadratique*, c'est-à-dire un point du plan mobile qui décrit une conique.

Selon le n° **9**, la courbe représentante est alors la section du cylindre cinématique avec un autre cylindre. Mais la représentante, étant biquadratique, porte en général *quatre* cônes, dont *un* encore pourra être un cylindre; en ce cas, le sommet du quatrième sera l'intersection des axes de ces trois cylindres, donc un point de OA, qu'on pourra transformer en origine O. Nous trouvons ainsi :

Un mouvement biquadratique peut avoir deux entraînements quadratiques. L'équation du mouvement pourra être mise sous la forme

$$F(c, s, a) = 0,$$

F étant une fonction homogène quadratique.

Inversement, un cône F détermine une représentante qui porte deux autres cylindres. Ainsi, pour donner un exemple numérique, on

peut faire rester l'origine du plan mobile sur la droite $Y = 0$, tandis que le point $(1; 0)$ reste sur l'ellipse

$$X^2 - 2XY + 3Y^2 + 4X - 4Y - 5 = 0$$

et le point $(0; 1)$ sur l'hyperbole

$$X^2 + 2XY - Y^2 + 4X + 4Y - 3 = 0.$$

16. La quatrième classe comprend les mouvements *sans entraînement droit*, dont les courbes représentantes sont *à triple courbure*, situées toujours sur le bicylindre cinématique.

La courbe la plus simple de ce genre est la *rationnelle du quatrième degré*, possédant trois points doubles apparents. Les trajectoires montrent donc trois points doubles (de seconde espèce), le mouvement est bien distingué du deuxième type biquadratique, puisqu'il ne possède ni entraînement droit, ni position double.

La courbe représentante est projetée de chacune de ses cordes par un bicône quadratique, et inversement : la droite-sommet d'un bicône quadratique contenant la courbe doit être une corde. La droite-sommet $A_\infty B_\infty$ du bicylindre cinématique a donc deux points P_1 et P_2 en commun avec la courbe. La représentante est déterminée par ces deux points, qu'on peut choisir arbitrairement, et *cinq* autres points P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, pris sur le bicylindre cinématique. Elle est l'intersection de celui-ci avec deux bicônes quadratiques, l'un à droite-sommet P_1P_3 et passant par P_2, P_4, P_5, P_6, P_7, l'autre à droite-sommet P_2P_3 et passant par P_1, P_4, P_5, P_6, P_7. Cette construction, comme sa démonstration, est en analogie parfaite avec celle d'une cubique gauche contenant six points donnés.

On peut aussi donner *sept* points arbitraires sur le bicylindre, donc :

Le mouvement du quatrième ordre sans entraînement droit est déterminé par sept positions du plan mobile.

Il n'y a aucune difficulté à exécuter, par l'extension de la méthode de la géométrie descriptive à l'espace à quatre dimensions, la construction de la courbe dans une épure et à transporter les positions c, s, a, b obtenues dans l'épure cinématique. On pourra alors résoudre les

problèmes que nous avons indiqués dans le n° **12** pour le cas plus facile d'un entraînement droit.

Le procédé pourra encore servir pour les mouvements d'ordre plus élevé si les représentantes admettent un traitement descriptif.

17. Le mouvement *cardioïdal*, l'inverse de l'elliptique, est un cas particulier du mouvement du n° **16**.

En effet, les inverses selon les formules du n° **7** de deux espaces linéaires $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$ seront deux variétés quadratiques $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$. La partie du second degré dans ces équations sera linéaire en $(-ac + bs)$ et $(-as - bc)$, comme celle du premier degré en c et s. Les quadriques à l'infini de $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$ passeront donc par les quatre droites :

$$(1)\begin{cases} a = 0, \\ b = 0; \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} a = bi, \\ c = -si; \end{cases} \qquad (3)\begin{cases} a = -bi, \\ c = si; \end{cases} \qquad (4)\begin{cases} c = 0, \\ s = 0. \end{cases}$$

Le bicylindre cinématique ne contient pas (1), par contre il passe par (2) et (3), tandis que (4) est sa ligne double; il reste de l'intersection dégénérée totale une partie courbe du quatrième ordre à triple courbure.

On obtient les équations de la courbe sous forme paramétrique en partant du plan à section elliptique

$$A = p_1 C + q_1 S,$$
$$B = p_2 C + q_2 S,$$

l'origine étant prise au point commun avec le plan axial du bicylindre cinématique. Après l'introduction de coordonnées homogènes w et W, les formules du n° **7** donnent :

$$c = CW, \qquad s = -SW,$$
$$a = -p_1 C^2 + q_2 S^2 + (p_2 - q_1) CS,$$
$$b = -p_2 C^2 - q_1 S^2 - (p_1 + q_2) CS,$$
$$w = W^2,$$

les paramètres C, S, W devant satisfaire à la relation

$$C^2 + S^2 = W^2.$$

On voit que les quatre points à l'infini de la courbe ($W = 0$) coïncident en paires avec les points

$$c = 0, \quad s = 0, \quad a = 1, \quad b = i$$

et

$$c = 0, \quad s = 0, \quad a = 1, \quad b = -i,$$

les points isotropes du plan axial.

Pour les tangentes on trouve, par un léger calcul, indépendamment de p_1, q_1, p_2, q_2, les droites (3) et (2). Les représentantes cardioïdales sont caractérisées par ces deux points à l'infini et ces tangentes. Ces données équivalent à quatre points de la courbe, celle-ci est déterminée par trois points arbitraires. Comme le mouvement elliptique, le mouvement cardioïdal est déterminé par *trois* positions du plan mobile (construction par inversion du mouvement).

Un autre cas particulier des mouvements du n° **16** est formé par ces mouvements où les courbes polaires sont *deux cercles*, *deux ellipses* ou *deux hyperboles symétriques*, selon le n° **15**.

(Le cas de deux paraboles donnait le mouvement cubique.)

18. Imaginons un mouvement quelconque. La courbe représentante C possédera en un point P régulier une tangente τ, un plan osculateur π et un espace osculateur ε, ayant respectivement un contact biponctuel, triponctuel, quadriponctuel avec la courbe. La représentante C′ du mouvement inverse aura aussi, en général, au point P′ correspondant à P, une tangente τ', un plan π' et un espace ε' osculateurs.

Par la tangente τ on peut mener en général un seul plan ayant avec le bicylindre cinématique une section circulaire du système droit, puisqu'il passe par le point à l'infini de τ une seule parallèle de Clifford de $A_z B_z$ de ce système. La rotation déterminée par cette section circulaire a en commun avec le mouvement donné deux positions infiniment voisines, elle est la *rotation tangente* ou *instantanée* pour la position P.

La tangente τ' donne la rotation instantanée inverse.

La distribution des tangentes aux trajectoires en tous les points

du plan mobile est, pour une position régulière d'un mouvement quelconque, identique à celle de la rotation tangente.

Le plan osculateur π contiendra en général une section elliptique du bicylindre cinématique, représentant un *mouvement elliptique osculateur* (n° **11**).

La distribution des cercles osculateurs aux trajectoires en tous les points du plan mobile est à chaque moment identique à celle dans le mouvement elliptique osculateur; la circonférence lieu des points qui décrivent des droites dans ce mouvement n'est rien autre que le cercle des inflexions bien connu.

Le plan osculateur π' donne une représentante elliptique dont l'inverse, selon le n° **7**, a un contact triponctuel en P avec C; cette courbe inverse représente donc le *mouvement cardioïdal osculateur* (n° **17**).

L'espace osculateur ε a en commun avec le bicylindre cinématique un cylindre ne portant que des représentantes de mouvements à entraînement droit (n° **12**). Afin de choisir parmi ces courbes celle qui, ayant en P un contact quadriponctuel avec C, représente le mouvement le plus simple, considérons en même temps l'espace osculateur ε'. L'espace quadratique E′ inverse de ε', selon le n° **7**, aura un contact de ce genre. L'intersection du bicylindre avec ε et E′ représente un *mouvement paraconchoïdal* (n° **14**) ayant en commun avec le mouvement donné quatre positions infiniment rapprochées. Choisissant, pour représenter l'élément différentiel de quatre points confondus d'une courbe plane, la *parabole hyperosculatrice*, nous avons : *la distribution des paraboles hyperosculatrices aux trajectoires en tous les points du plan mobile est, à chaque instant, identique à celle dans le mouvement paraconchoïdal osculateur.*

Quant aux *points singuliers* de la courbe représentante, ils se retrouveront comme *positions singulières* dans le mouvement, les propriétés concernant ces points se traduiront en autant de propriétés de la cinématique du plan.

Ainsi, supposant de nouveau les représentantes algébriques, les relations de Plücker-Cayley et de Salmon-Cremona pourront être appliquées aux mouvements à entraînement droit, comme leurs analogues pour les courbes en E_4 (Véronèse) aux mouvements sans cet entraînement.

19. Les *mouvements* considérés jusqu'ici sont, proprement dit, des ensembles de positions dépendant d'un seul paramètre. Mais la position d'un plan par rapport à un autre ayant *trois* degrés de liberté, on peut imaginer aussi des ensembles de positions dépendant de *deux* paramètres. Leurs représentantes seront des *surfaces*, soit contenues dans un hyperplan (entraînement droit, n° **12**), soit *tordues*, mais situées toujours sur le bicylindre cinématique.

Le *degré* d'une telle surface est le nombre de points d'intersection avec un plan ou bien le degré de la courbe d'intersection avec un hyperplan. Sa signification cinématique est donc *le nombre de positions que l'ensemble a en commun avec un mouvement elliptique quelconque* ou bien *le degré du mouvement contenu dans l'ensemble qu'effectue le plan quand on contraint un point arbitraire à rester sur une droite choisie.*

Prenant, avec la première définition, un plan de section circulaire droite, le degré devient le nombre de positions dans lesquelles un point arbitraire du plan mobile se trouve à une place prescrite dans le plan fixe.

Un plan générateur du bicylindre cinématique aura en commun avec la surface une courbe de degré n, de sorte que

$$2n + k = N,$$

si N est le degré de la surface, k le nombre de fois qu'elle contient la droite $A_\infty B_\infty$; les mouvements parallèles (n° **10**) contenus dans l'ensemble sont donc de degré n.

Les seuls *plans* dans le bicylindre sont les plans générateurs, les *ensembles de positions de premier degré* qu'ils représentent sont donc ceux des positions d'*orientation fixe*.

Puisqu'il n'existe pas de surfaces tordues du second degré, les *ensembles du second degré* ne sont autres que ceux dans lesquels *un point du plan mobile est dans une droite du plan fixe*. Les surfaces représentantes sont des cylindres (n° **2**).

Toutes les autres surfaces dans le bicylindre cinématique sont tordues; la plus simple est celle *du troisième degré*, intersection avec un bicône ayant avec le bicylindre un plan générateur en commun. Chaque espace linéaire passant par ce plan contiendra un autre plan

générateur du bicylindre ainsi que du bicône, leur droite d'intersection appartiendra à la surface voulue, qui est réglée. Le mouvement d'orientation constante quelconque contenu dans l'ensemble sera donc une translation ($N = 3$, $n = k = 1$). Quand on assujettit un point du plan mobile à un entraînement droit, le mouvement qui reste possible dans l'ensemble sera en général un mouvement cubique.

20. Considérons de nouveau les formules

$$\begin{aligned} X &= xc + ys + a, \\ Y &= -xs + yc + b, \end{aligned}$$

sans supposer maintenant c et s liées par la relation

$$c^2 + s^2 = 1.$$

La transformation est alors *semblable* en sens direct, le plan (X, Y) étant à échelle $\sqrt{c^2 + s^2} : 1$ par rapport au plan (x, y). Chaque point (c, s, a, b) indique une position semblable du plan mobile dans le plan fixe, le bicylindre

$$c^2 + s^2 = r^2$$

rassemble les positions d'agrandissement r. La valeur $r = 1$ correspond à la grandeur originelle; la valeur $r = 0$, donc $c = 0$, $s = 0$, indique que les points à distance finie du plan mobile sont contractés en un point du plan fixe.

Chaque courbe tracée dans l'espace cinématique représente un mouvement avec échelle variable. On étend sans difficulté la théorie développée dans ce qui précède à ce cas plus ample; signalons tout d'abord que le degré des trajectoires est encore égal à celui de la courbe représentante.

On aura ainsi :

Deux figures planes directement semblables déterminent un « *mouvement semblable* » *du premier degré*, où toutes les trajectoires sont droites.

Une *courbe plane* représente un mouvement semblable dans lequel les trajectoires sont en général du degré et du type projectif de la représentante. Il y aura pourtant $\varkappa'$ trajectoires droites, correspon-

dant aux espaces linéaires du faisceau d'hyperplans porté par le plan de la représentante. En effet, si

$$Pc + Qs + Ra + Sb + T = 0$$

est l'équation d'un hyperplan, le point

$$x = \frac{PR - QS}{R^2 + S^2}, \qquad y = \frac{PS + QR}{R^2 + S^2}$$

du plan mobile, intersection des droites

$$Rx + Sy = P \qquad \text{et} \qquad Ry - Sx = Q,$$

décrira dans le plan fixe la droite

$$RX + SY + T = 0.$$

Le lieu, dans le plan mobile, des points à trajectoire droite est une circonférence. Donnant le plan de la représentante par les équations

$$P_1 c + Q_1 s + R_1 a + S_1 b + T_1 = 0,$$
$$P_2 c + Q_2 s + R_2 a + S_2 b + T_2 = 0,$$

on trouve l'équation de ce cercle :

$$\begin{aligned}&(x^2 + y^2)(R_1 S_2 - R_2 S_1)\\ &\quad - x(P_1 S_2 - P_2 S_1 + Q_1 R_2 - Q_2 R_1)\\ &\quad + y(P_1 R_2 - P_2 R_1 - Q_1 S_2 + Q_2 S_1) - (P_1 Q_2 - P_2 Q_1) = 0,\end{aligned}$$

dont les points

$$x_\lambda = \frac{(P_1 + \lambda P_2)(R_1 + \lambda R_2) - (Q_1 + \lambda Q_2)(S_1 + \lambda S_2)}{(R_1 + \lambda R_2)^2 + (S_1 + \lambda S_2)^2},$$
$$y_\lambda = \frac{(P_1 + \lambda P_2)(S_1 + \lambda S_2) + (Q_1 + \lambda Q_2)(R_1 + \lambda R_2)}{(R_1 + \lambda R_2)^2 + (S_1 + \lambda S_2)^2}$$

décrivent les droites du faisceau

$$(R_1 + \lambda R_2) X + (S_1 + \lambda S_2) Y + (T_1 + \lambda T_2) = 0.$$

Dans le *mouvement semblable du second degré*, les trajectoires sont en général des coniques qui sont toutes à la fois ellipses, ou hyperboles, ou bien paraboles. Le mouvement est déterminé par

exemple par cinq positions d'un segment AB, les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 étant choisis arbitrairement sur une droite α, comme B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 sur une droite β.

La construction est plus facile encore si l'on donne α et β, la trajectoire conique γ d'un point C du segment AB (on peut prendre un cercle) et le rapport AC : CB.

Les *courbes à double courbure* représentent des mouvements semblables à un seul entraînement droit, celles à *triple courbure* les mouvements sans cet entraînement.

Les *surfaces* et les *hypersurfaces* contenues dans l'espace cinématique représentent des ensembles de positions semblables dépendant respectivement de deux ou de trois paramètres.

En un mot, toute la géométrie de l'espace à quatre dimensions aura son interprétation cinématique dans le plan, raison (ou prétexte) de plus de nous occuper de cet espace.

Sur les quartiques gauches de première espèce, leurs représentations paramétriques et leur classification,

PAR R. DE MONTESSUS DE BALLORE.

INTRODUCTION.

Les quartiques gauches de première espèce, qui sont les intersections de deux surfaces du second ordre, se partagent en trois groupes : les quartiques φ_4'', qui ont un point de rebroussement; les quartiques φ_4', qui ont un point double, et les quartiques φ_4, qui n'ont pas de point singulier (¹).

Les quartiques φ_4'' et φ_4' sont unicursales, comme le sont aussi les quartiques gauches de deuxième espèce : on sait que ces dernières courbes sont les intersections d'une surface du troisième ordre et d'une surface du second ordre, qui se coupent en outre suivant deux génératrices d'un même système de la quadrique. On sait aussi qu'il n'existe pas d'autres courbes du quatrième ordre que celles de deuxième et de première espèce.

Certains théorèmes généraux montrent que les quartiques φ_4, elles ne sont pas unicursales, peuvent être représentées paramétriquement au moyen des fonctions elliptiques : et cela met en relief des propriétés intéressantes et bien connues de ces courbes. Cependant, il faut prendre garde, nous le verrons, que ces quartiques doivent être partagées en trois sous-groupes : les courbes φ_4^1, pour lesquelles le faisceau de quadriques correspondant comprend quatre cônes du second degré réels ; les courbes φ_4^2, pour lesquelles deux cônes seulement sont réels; les courbes φ_4^3, où il n'y a plus de cônes réels : et, si un cône est imaginaire, son sommet est imaginaire, quand la courbe est réelle.

(¹) Cette notation paraît être insuffisante. Une notation un peu différente sera proposée au n° 45.

W. Killing (¹) a réalisé la préparation paramétrique des quartiques φ_4^1 au moyen des fonctions σ, et l'on peut remplacer ces fonctions, qui figurent par leurs rapports, par $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, sous réserve de montrer que le module k^2 est compris entre 0 et 1. *Cette représentation ne convient plus pour les sous-groupes* φ_4^2, φ_4^3, *à moins d'accepter un tétraèdre de référence imaginaire*, car le tétraèdre employé a pour sommets les sommets des quatre cônes correspondant à la courbe : *et si le tétraèdre est imaginaire, les coordonnées le sont aussi.* La même remarque doit être faite pour la représentation indiquée par Léauté (²), qui emploie les fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ $\operatorname{dn} u$, et pour les résultats obtenus par G. Loria (³), qui se sert des fonctions θ.

H. Halphen (⁴) a montré que les fonctions pu, $p'u$, $p''u$ peuvent représenter les quartiques de première espèce; ici, deux cônes au moins doivent être réels, sauf recours encore à des coordonnées imaginaires, quand aucun des cônes n'est réel. Le cas de quatre cônes réels prêterait à discussion.

Plus récemment, A. Enders (⁵) a distingué, dans cette question, les trois sous-groupes φ_4^1, φ_4^2, φ_4^3 et paraît avoir employé des tétraèdres réels, mais les formules qu'il donne sont compliquées d'imaginaires dont la présence n'est pas justifiée pour les quartiques des sous-groupes φ_4^1, φ_4^2. Les fonctions employées pour la représentation paramétrique sont celles de Jacobi.

Chacun de ces auteurs enfin se préoccupe plutôt de montrer la *possibilité* de représenter les quartiques φ_4 par les fonctions elliptiques et d'indiquer des formes générales de représentations paramétriques, que de réaliser les transformations permettant d'écrire les équations paramétriques en fonction des données qui figurent dans les équations tétraédriques ou cartésiennes. Aussi leurs résultats ne permettent pas d'aborder certains problèmes importants, par exemple celui, non encore étudié, et d'un grand intérêt, de la description des diverses quartiques constituant chaque groupe ou sous-groupe : les formes géométriques de ces courbes ne nous sont connues que dans des cas particuliers.

(¹) W. Killing, *Diss. Berlin*, 1872, p. 11.

(²) H. Léauté, *Journal de l'École Polytechnique*, XLVIe cahier, 1879, p. 65.

(³) G. Loria, *Atti R. Acad. Lincei, Rendiconti*, 6e série, t. II, 1890, p. 179.

(⁴) H. Halphen, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, t. II, Paris, 1880, p. 450. Voir aussi d'Esclaibes, *Thèse*, 1880, p. 97.

(⁵) A. Enders, *Nova Acta Acad. Leop.*, 85, 1906, p. 401.

J'obtiens dans ce Mémoire la représentation par les fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ des quartiques définies par leurs équations tétraédriques, en partant pour chaque sous-groupe φ_4^1, φ_4^2, φ_4^3 de coordonnées *réelles*. Ces fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ ont toujours leur module k réel et compris entre -1 et $+1$. Dans un cas, un seul, il s'introduit des imaginaires, c'est à propos des quartiques φ_4^3 (¹).

Je donne ensuite la solution de la représentation paramétrique des quartiques définies par trois cylindres : ici tous les éléments sont réels. Ce problème n'avait pas encore été abordé : il présente de grandes difficultés (²).

Je montre aussi que les quartiques φ_4^1, qui sont de genre zéro, doivent être partagées en deux sous-groupes.

Comme conclusion, j'établis une classification nouvelle des quartiques gauches de première espèce.

Les fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ n'ont pas été choisies au hasard. Leur intérêt, pour la représentation de courbes réelles, vient de ce qu'elles rendent aisée la distinction du réel de l'imaginaire et aussi de ce que ce sont les seules fonctions elliptiques dont on ait construit des Tables numériques, sous forme d'intégrales elliptiques (³).

Les calculs sont minutieux et offrent quelque difficulté; le lecteur ne devra point en être surpris : il semble que ce caractère soit inévitablement attaché à toutes les questions se rapportant aux courbes gauches (⁴).

Chapitre I. — Quartiques φ_4^1.

1. Les quartiques φ_4^1, pour lesquelles les quatre cônes sont réels, peuvent être représentées (⁵) par le système d'équations

$$(1) \qquad \alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma T^2 = 0, \qquad \delta X^2 + \varepsilon Z^2 + \zeta T^2 = 0.$$

(¹) R. de Montessus de Ballore, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 166, 1918, p. 212.

(²) R. de Montessus de Ballore, *Ibid.*, p. 345.

(³) Des Tables étendues et interpolables des intégrales elliptiques de première et de deuxième espèce et de la fonction $\operatorname{Log} q$ sont actuellement sous presse (Paris, Gauthier-Villars et Cie).

(⁴) *Cf.* par exemple, à ce propos, H. Halphen, *Classification des courbes gauches algébriques* (*J. E. P.*, 1882), et R. de Montessus de Ballore, *Sur les courbes gauches algébriques* (*J. M. P. A.*, 1916).

(⁵) Painvin, *Nouv. Ann. Math.*, 1868, et R. de Montessus de Ballore, *Introduction à la Théorie des Courbes gauches algébriques*, Paris, Croville-Morant, 1918 (*Cours libre professé à la Faculté des Sciences de Paris*), autographié.

où X, Y, Z, T représentent les coordonnées x, y, z, t de la courbe, prises dans un certain ordre (par exemple, $x = Y$, $y = X$, $z = Z$, $t = T$), le tétraèdre de référence ayant pour sommets les sommets des quatre cônes.

Parmi les coefficients α, β, γ, un, au moins, est négatif et deux, au plus, sont négatifs, sinon la courbe serait imaginaire. Un changement de signes ramène le second cas au premier. Il en est de même pour δ, ε, ζ.

Si nous mettons les signes *en évidence*, nous obtenons les neuf combinaisons que voici :

$$(1)\quad \begin{cases} -\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma T^2 = 0, \\ -\delta X^2 + \varepsilon Z^2 + \zeta T^2 = 0, \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} \alpha X^2 + \beta Y^2 - \gamma T^2 = 0, \\ \delta X^2 + \varepsilon Z^2 - \zeta T^2 = 0. \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} -\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma T^2 = 0, \\ \delta X^2 - \varepsilon Z^2 + \zeta T^2 = 0, \end{cases} \qquad (4)\quad \begin{cases} \alpha X^2 + \beta Y^2 - \gamma T^2 = 0, \\ \delta X^2 - \varepsilon Z^2 + \zeta T^2 = 0, \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} -\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma T^2 = 0, \\ \delta X^2 + \varepsilon Z^2 - \zeta T^2 = 0, \end{cases} \qquad (6)\quad \begin{cases} \alpha X^2 + \beta Y^2 - \gamma T^2 = 0, \\ -\delta X^2 + \varepsilon Z^2 + \zeta T^2 = 0, \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} \alpha X^2 - \beta Y^2 + \gamma T^2 = 0, \\ -\delta X^2 + \varepsilon Z^2 + \zeta T^2 = 0, \end{cases} \qquad (8)\quad \begin{cases} \alpha X^2 - \beta Y^2 + \gamma T^2 = 0, \\ \delta X^2 + \varepsilon Z^2 - \zeta T^2 = 0, \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} \alpha X^2 - \beta Y^2 + \gamma T^2 = 0, \\ \delta X^2 - \varepsilon Z^2 + \zeta T^2 = 0. \end{cases}$$

Nous allons réduire à trois les neuf systèmes d'équations qu'on vient d'écrire.

1° Échangeons X et T dans le système (2); il vient

$$-\gamma X^2 + \beta Y^2 + \alpha X^2 = 0, \qquad -\zeta X^2 + \varepsilon Z^2 + \delta X^2 = 0,$$

système équivalant à (1); la même transformation montre que (4) équivaut à (3) et que (6, 8) sont respectivement équivalents à (5, 7).

2° Le système (9) est réductible au système (5). En effet, éliminons d'abord X^2, puis T^2 entre les deux équations (9). Il vient

$$\begin{cases} -\beta\delta Y^2 + (\gamma\delta - \alpha\zeta) T^2 + \alpha\varepsilon Z^2 = 0, \\ -\beta\zeta Y^2 - (\gamma\delta - \alpha\zeta) X^2 + \gamma\varepsilon Z^2 = 0; \end{cases}$$

si $\gamma\delta - \alpha\zeta > 0$, nous écrirons ce système

$$\begin{cases} -\beta\delta Y^2 + (\gamma\delta - \alpha\zeta) T^2 + \alpha\varepsilon Z^2 = 0, \\ \beta\delta Y^2 + (\gamma\delta - \alpha\zeta) X^2 - \gamma\varepsilon Z^2 = 0; \end{cases}$$

sa forme équivaut à celle de (5); si $\gamma\delta - \alpha\zeta < 0$, nous l'écrirons

$$\left\{\begin{array}{l} \beta\delta Y^2 + (\alpha\zeta - \gamma\delta)T^2 - \alpha\varepsilon Z^2 = 0, \\ -\beta\zeta Y^2 + (\alpha\zeta - \gamma\delta)X^2 + \gamma\varepsilon Z^2 = 0, \end{array}\right.$$

forme équivalant à (6), donc à (5), 1°.

3° Le système (7) est lui-même réductible à (5), par la même transformation. Éliminons en effet X^2, puis T^2; nous avons

$$\left\{\begin{array}{l} -\beta\delta Y^2 + \alpha\varepsilon Z^2 + (\gamma\delta + \alpha\zeta)T^2 = 0. \\ \beta\zeta Y^2 + \gamma\varepsilon Z^2 - (\gamma\delta + \alpha\zeta)X^2 = 0. \end{array}\right.$$

Il ne reste donc à étudier que les systèmes (1), (3), (5).

2. Ne précisons plus, *pour le moment*, les signes de α, β, γ, δ, ε, ζ. Revenons au système général

$$(10)\quad \alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma T^2, \quad \delta X^2 + \varepsilon Z^2 + \zeta T^2 = 0 \quad (\text{signes de } \alpha, \ldots, \zeta \text{ non précisés})$$

que nous écrirons

$$\alpha\frac{X^2}{T^2} + \beta\frac{Y^2}{T^2} + \gamma = 0, \qquad \delta\frac{X^2}{T^2} + \varepsilon\frac{Z^2}{T^2} + \zeta = 0.$$

1° Posons

$$(11)\qquad \frac{X}{T} = \frac{\lambda}{\operatorname{sn} u}, \qquad \frac{Y}{T} = \frac{\mu \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}, \qquad \frac{Z}{T} = \frac{\nu \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u};$$

il vient

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha\lambda^2 + \beta\mu^2(1 - \operatorname{sn}^2 u) + \gamma \operatorname{sn}^2 u = 0, \\ \delta\lambda^2 + \varepsilon\nu^2(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u) + \zeta \operatorname{sn}^2 u = 0. \end{array}\right.$$

Exprimons que ces deux relations sont identiquement vérifiées. Nous aurons

$$(13)\quad \alpha\lambda^2 + \beta\mu^2 = 0, \qquad -\beta\mu^2 + \gamma = 0, \qquad \delta\lambda^2 + \varepsilon\nu^2 = 0, \qquad -\varepsilon\nu^2 k^2 + \zeta = 0.$$

Ces relations montrent que α et β d'une part, δ et ε d'autre part, sont de signes contraires et que β, γ, puis ε, ζ sont de mêmes signes. Les quatre combinaisons possibles

α.	β.	γ.	δ.	ε.	ζ.
+	—	—	+	—	—
+	—	—	—	+	+
—	+	+	+	—	—
—	+	+	—	+	+

se réduisent, en changeant au besoin tous les signes de l'une des équations (10) ou même de ces deux équations, à la combinaison suivante, *où les signes sont mis en évidence :*

$$-\alpha X^2+\beta Y^2+\gamma T^2=0, \qquad -\delta X^2+\varepsilon Z^2+\zeta T^2=0;$$

c'est le système (1).

Calculons k^2 au moyen des équations (13). Ces équations donnent

$$\gamma=\beta\mu^2, \qquad \lambda^2=-\frac{\beta}{\alpha}\mu^2=-\frac{\gamma}{\alpha}, \qquad \varepsilon\nu^2=-\delta\lambda^2=\frac{\gamma\delta}{\alpha},$$
$$k^2=\frac{\zeta}{\varepsilon\nu^2}=\frac{\alpha\zeta}{\gamma\delta};$$

$\frac{\alpha\zeta}{\gamma\delta}$ est positif, comme il est nécessaire; cette quantité est moindre que 1 si $\alpha\zeta<\gamma\delta$; si l'on avait $\alpha\zeta>\gamma\delta$, il suffirait de poser, au lieu de (11),

$$\frac{X}{T}=\frac{\lambda}{\operatorname{sn}u}, \qquad \frac{Y}{T}=\frac{\mu\operatorname{dn}u}{\operatorname{sn}u}, \qquad \frac{Z}{T}=\frac{\nu\operatorname{cn}u}{\operatorname{sn}u};$$

on trouverait un système analogue à (13), avec

$$0<k^2=\frac{\gamma\delta}{\alpha\zeta}<1.$$

2° Revenons au système (10) et posons

$$\frac{X}{T}=\frac{\lambda}{\operatorname{cn}u}, \qquad \frac{Y}{T}=\frac{\mu\operatorname{sn}u}{\operatorname{cn}u}, \qquad \frac{Z}{T}=\frac{\nu\operatorname{dn}u}{\operatorname{cn}u};$$

le système (10) prendra la forme

$$\begin{cases}\alpha\lambda^2+\beta\mu^2\operatorname{sn}^2u \qquad\qquad +\gamma(1-\operatorname{sn}^2u)=0,\\ \delta\lambda^2+\varepsilon\nu^2(1-k^2\operatorname{sn}^2u)+\zeta(1-\operatorname{sn}^2u)=0.\end{cases}$$

Exprimons que ces relations sont identiquement vérifiées :

$$\begin{cases}\alpha\lambda^2+\gamma=0, \qquad \beta\mu^2-\gamma=0,\\ \delta\lambda^2+\varepsilon\nu^2+\zeta=0, \qquad \varepsilon\nu^2k^2+\zeta=0;\end{cases}$$

d'où l'on déduit, par élimination de ζ entre les deux dernières,

$$\delta\lambda^2+\varepsilon\nu^2(1-k^2)=0;$$

α et γ, ε et ζ, δ et ε devant être deux à deux de même signes, β et γ

devant être de signes contraires, nous avons à étudier les combinaisons suivantes :

α.	β.	γ.	δ.	ε.	ζ.
+	−	−	+	−	+
+	−	−	−	+	−
−	+	+	+	−	+
−	+	+	−	+	−

qui par des changements de signes convenables, se réduisent à celle-ci :

−	+	+	+	−	+

C'est le système (3). Ici,

$$\varepsilon\nu^2 = -\delta\lambda^2 - \zeta = \frac{\gamma\delta}{\alpha} \qquad = \frac{\gamma\delta - \alpha\zeta}{\alpha},$$

$$k^2 = -\frac{\zeta}{\varepsilon\nu^2} \qquad = \frac{\alpha\zeta}{\alpha\zeta - \gamma\delta} = \frac{1}{1 - \dfrac{\gamma\delta}{\alpha\zeta}};$$

comme $\frac{\gamma\delta}{\alpha\zeta}$ est *négatif*, k^2 est compris entre 0 et 1.

3° Posons en dernier lieu

$$\frac{X}{T} = \frac{\lambda}{\operatorname{dn} u}, \qquad \frac{Y}{T} = \frac{\mu \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \qquad \frac{Z}{T} = \frac{\nu \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u};$$

le système (10) devient

$$\begin{cases} \alpha\lambda^2 + \beta\mu^2 \operatorname{sn}^2 u + \gamma(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u) = 0, \\ \delta\lambda^2 + \varepsilon\nu^2(1 - \operatorname{sn}^2 u) + \zeta(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u) = 0, \end{cases}$$

d'où

$$\alpha\lambda^2 + \gamma = 0, \qquad \beta\mu^2 - \gamma k^2 = 0, \qquad \delta\lambda^2 + \varepsilon\nu^2 + \zeta = 0, \qquad \varepsilon\nu^2 + \zeta k^2 = 0,$$

et, en éliminant $\varepsilon\nu^2$ entre les deux dernières équations,

$$\delta\lambda^2 + \zeta k'^2 = 0;$$

donc α et γ, puis ε et ζ, et δ, ζ sont respectivement de signes contraires, mais β et γ sont de même signe, ce qui se résume en

α.	β.	γ.	δ.	ε.	ζ.
−	+	+	+	+	−

et l'on trouve ainsi le système (5). On a

$$k'^2 = -\frac{\delta}{\zeta}\lambda^2 = \frac{\gamma\delta}{\alpha\zeta},$$

quantité positive.

Cette transformation suppose $\gamma\delta < \alpha\zeta$. Si $\gamma\delta > \alpha\zeta$, on écrit

$$\frac{X}{T} = \frac{\lambda}{\operatorname{dn} u}, \qquad \frac{Y}{T} = \frac{\mu \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, \qquad \frac{Z}{T} = \frac{\nu \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u},$$

et l'on obtient pour k'^2 :

$$k'^2 = \frac{\alpha\zeta}{\gamma\delta}.$$

5. Une quartique φ_4^1, définie par un système tel que (1), peut donc toujours être représentée paramétriquement au moyen des fonctions sn, cn, dn par un des systèmes

$$\frac{X}{\lambda} = \frac{Y}{\mu \operatorname{cn} u} = \frac{Z}{\nu \operatorname{dn} u} = \frac{T}{\operatorname{sn} u},$$
$$\frac{X}{\lambda} = \frac{Y}{\mu \operatorname{dn} u} = \frac{Z}{\nu \operatorname{cn} u} = \frac{T}{\operatorname{sn} u},$$
$$\frac{X}{\lambda} = \frac{Y}{\mu \operatorname{sn} u} = \frac{Z}{\nu \operatorname{dn} u} = \frac{T}{\operatorname{cn} u},$$
$$\frac{X}{\lambda} = \frac{Y}{\mu \operatorname{sn} u} = \frac{Z}{\nu \operatorname{cn} u} = \frac{T}{\operatorname{dn} u},$$
$$\frac{X}{\lambda} = \frac{Y}{\mu \operatorname{cn} u} = \frac{Z}{\nu \operatorname{sn} u} = \frac{T}{\operatorname{dn} u},$$

où λ, μ, ν sont réels et $0 < k_2 < 1$.

En faisant correspondre convenablement x, y, z, t à X, Y, Z, T, il en résulte que *toute quartique φ_4^1 définie par un système d'équations*

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma T^2 = 0, \qquad \delta X^2 + \varepsilon Z^2 + \zeta T^2 = 0$$

peut être représentée par des équations paramétriques de la forme

$$(14) \qquad \frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu \operatorname{sn} u} = \frac{z}{\nu \operatorname{cn} u} = \frac{t}{\operatorname{dn} u} \qquad (0 < k^2 \text{ arbitraire} < 1),$$

où λ, μ, ν sont réels. On peut ajouter que les expressions de λ, μ, ν en fonction de α, β, γ, δ, ε, ζ sont des plus faciles à obtenir.

Réciproquement, les équations (14) *représentent toujours une quartique* $\mathfrak{Q}_1^1$, *quels que soient* λ, μ, ν, k^2.

Éliminons en effet $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ entre les équations (14) et celles-ci

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1, \qquad k^2 \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{dn}^2 u = 1;$$

il vient

$$x^2 - \frac{\lambda^2}{\mu^2} y^2 - \frac{\lambda^2}{\nu^2} z^2 = 0, \qquad x^2 - k^2 \frac{\lambda^2}{\mu^2} y^2 t^2,$$

équations qui représentent la courbe dans le système de coordonnées où le tétraèdre a pour sommets les sommets de quatre cônes du faisceau ponctuel de quadriques correspondant à la courbe.

L'équation du faisceau de quadriques est

$$x^2(1+\Delta) - \frac{\lambda^2}{\mu^2}(1+k^2\Delta) y^2 - \frac{\lambda^2}{\nu^2} z^2 - \lambda^2 \Delta t^2 = 0;$$

l'équation en Δ

$$\begin{vmatrix} 1+\Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda^2}{\mu^2}(1+k^2\Delta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda^2}{\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^2\Delta \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(1+\Delta)(1+k^2\Delta)\Delta = 0$$

a une racine infinie (elle est, en principe du quatrième degré), une racine égale à -1, une racine réelle, une racine égale à $-\frac{1}{k^2}$.

Ces racines sont réelles et différentes les unes des autres, et cela correspond à la définition des quartiques $\mathfrak{Q}_1^1$.

Chapitre II. — Quartiques $\mathfrak{Q}_1^2$.

4. Ces quartiques peuvent être définies par les deux cônes [1]

$$y^2 + B(z^2 - t^2) + 2Dzt = 0, \qquad x^2 + B'(z^2 - t^2) + 2D'zt = 0.$$

---

[1] Painvin, etc., *loc. cit.*, p. 79, *Note* (5).

Posons

$$t = \alpha z; \tag{2}$$

il vient

$$y^2 + [B(1-\alpha^2) + 2D\alpha]z^2 = 0, \qquad x^2 + [B'(1-\alpha^2) + D'\alpha]z^2 = 0. \tag{3}$$

Ici encore, les signes de B, D, B', D' vont jouer un rôle fondamental.

3. I. Soit

$$B = -p^2 < 0, \qquad D = -q^2 < 0;$$

nous avons

$$y^2 + (p^2\alpha^2 - 2q^2\alpha - p^2)z^2 = 0,$$

ou

$$y^2 - \frac{p^4+q^4}{p^2}\left[1 - \frac{(p^2\alpha - q^2)^2}{p^4+q^4}\right]z^2 = 0. \tag{4}$$

Nous avons

$$1 - \frac{(p^2\alpha - q^2)^2}{p^4+q^4} > 0,$$

sinon le premier membre de cette équation ne pourrait s'annuler pour des valeurs réelles de $\frac{y}{z}$; nous pouvons donc poser

$$\frac{p^2\alpha - q^2}{\sqrt{p^4+q^4}} = \sin\varphi,$$

et nous en tirons

$$\alpha = \frac{\sqrt{p^4+q^4}\sin\varphi + q^2}{p^2}.$$

Il en résulte (2, 4),

$$t = \frac{\sqrt{p^4+q^4}\sin\varphi + q^2}{p^2}z, \qquad y = \frac{\sqrt{p^4+q^4}}{p}z\cos\varphi. \tag{5}$$

Nous avons ensuite

$$\begin{aligned} z^2 - t^2 &= z^2 - \frac{(\sqrt{p^4+q^4}\sin\varphi + q^2)^2}{p^4}z^2 \\ &= \frac{1}{p^4}\left[-(p^4+q^4)\sin^2\varphi - 2q^2\sqrt{p^4+q^4}\sin\varphi + p^4 - q^4\right]z^2, \\ zt &= \frac{\sqrt{p^4+q^4}\sin\varphi + q^2}{p^2}z^2; \end{aligned}$$

portons dans (1^2); il vient, après réduction,

$$(6)\qquad x=\frac{1}{p^2}\sqrt{\begin{array}{l}B'(p^4+q^4)\sin^2\varphi+2\sqrt{p^4+q^4}(B'q^2-D'p^2)\sin\varphi\\ -B'(p^4-q^4)-2D'p^2q^2z.\end{array}}$$

On remarquera que *le discriminant de la quantité sous le radical*

$$(7)\quad (p^4+q^4)[(B'q^2-D'p^2)^2+B'^2(p^4-q^4)+2B'D'p^2q^2]=(p^4+q^4)D'^2p^4$$

est toujours positif.

Les formules (5, 6) réalisent une représentation paramétrique des quartiques φ_4^2, dans l'hypothèse $B<0$, $D<0$.

II. Soit maintenant

$$B=-p^2<0,\qquad D=q^2>0.$$

La représentation paramétrique sera réalisée en changeant q^2 en $-q^2$ dans les formules (5, 6); *le discriminant* (7) *n'est pas modifié et reste positif.*

III. Soit

$$B=p^2>0,\qquad D=q^2>0.$$

Nous avons ici

$$y^2-(p^2\alpha^2-2q^2\alpha-p^2)z^2=0,$$

$$y^2-\frac{p^4+q^4}{p^2}\left[\frac{(p^2\alpha-q^2)^2}{p^4+q^4}-1\right]z^2=0,$$

avec nécessairement

$$\frac{(p^2\alpha-q^2)^2}{p^4+q^4}-1\geq 0,$$

sinon $\frac{y}{z}$ serait imaginaire. Posons

$$(8)\qquad \frac{p^2\alpha-q^2}{\sqrt{p^4+q^4}}=\frac{1}{\sin\varphi};$$

nous aurons

$$y^2-\frac{p^4+q^4}{p^2}\left(\frac{1}{\sin^2\varphi}-1\right)z^2=0,$$

$$(9)\qquad y=\frac{\sqrt{p^4+q^4}}{p}\,\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\,z.$$

La relation (8) donne ensuite

$$\alpha=\frac{q^2\sin\varphi+\sqrt{p^4+q^4}}{p^2\sin\varphi},$$

et il en résulte (2)

$$t = \frac{q^2 \sin\varphi + \sqrt{p^4 + q^4}}{p^2 \sin\varphi} z. \tag{10}$$

Nous avons ensuite

$$z^2 - t^2 = z^2 \left[1 - \frac{(q^2 \sin\varphi + \sqrt{p^4 + q^4})^2}{p^4 \sin^2\varphi} \right]$$
$$= \frac{(p^4 - q^4)\sin^2\varphi - 2q^2\sqrt{p^4 + q^4}\sin\varphi - (p^4 + q^4)}{p^4 \sin^2\varphi} z^2$$

et (10)

$$zt = \frac{q^2 \sin\varphi + \sqrt{p^4 + q^4}}{p^2 \sin\varphi} z^2;$$

nous avons encore (1^2)

$$\frac{x^2}{z^2} = \frac{-B'(p^4 - q^4)\sin^2\varphi + 2B'q^2\sqrt{p^4 + q^4}\sin\varphi + B'(p^4 + q^4)}{p^4 \sin^2\varphi}$$
$$- 2D' \frac{q^2 \sin\varphi + \sqrt{p^4 + q^4}}{p^2 \sin\varphi}$$

et, après réductions,

$$x = \frac{1}{p^2 \sin\varphi} \sqrt{\begin{array}{l} [-B'(p^4 - q^4) - 2D'p^2q^2]\sin^2\varphi \\ \quad + 2\sqrt{p^4 + q^4}(B'q^2 - D'p^2)\sin\varphi + B'(p^4 + q^4)z. \end{array}} \tag{11}$$

Les formules (9, 10, 11) donnent une représentation paramétrique, dans l'hypothèse actuellement faite.

Le discriminant de la quantité sous le radical

$$(p^4 + q^4)\{(B'q^2 - D'p^2)^2 - [-B'(p^4 - q^4) - 2D'p^2q^2]B'\} = (p^4 + q^4)(B'^2 + D'^2)p^4$$

est toujours positif, comme dans les cas précédents.

IV. Soit en dernier lieu

$$B = p^2 > 0, \qquad D = -q^2 < 0;$$

on obtiendra les formules voulues en changeant q^2 en $-q^2$ dans les relations (9, 10, 11); *le discriminant*

$$(p^4 + q^4)(B'^2 + D'^2)p^4$$

reste positif.

En résumé, en distinguant quatre cas, les quartiques φ_4^2 *peuvent*

être représentées paramétriquement comme il suit, au moyen des fonctions circulaires :

I.

$$y^2 - p^2(z^2 - t^2) - 2q^2 z t = 0, \qquad x^2 + B'(z^2 - t^2) + 2D' z t = 0;$$

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{z} = \dfrac{1}{p^2}\sqrt{\begin{array}{l} B'(p^4+q^4)\sin^2\varphi \\ \quad + 2\sqrt{p^4+q^4}(B'q^2 - D'p^2)\sin\varphi - B'(p^4-q^4) - 2D'p^2q^2, \end{array}} \\ \dfrac{y}{z} = \dfrac{\sqrt{p^4+q^4}}{p} z\cos\varphi, \qquad \dfrac{t}{z} = \dfrac{\sqrt{p^4+q^4}\sin\varphi + q^2}{p^2}. \end{cases}$$

II.

$$y^2 - p^2(z^2 - t^2) + 2q^2 z t = 0, \qquad x^2 + b'(z^2 - t^2) + 2D' z t = 0;$$

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{z} = \dfrac{1}{p^2}\sqrt{\begin{array}{l} B'(p^4+q^4)\sin^2\varphi \\ \quad - 2\sqrt{p^4+q^4}(B'q^2 + D'p^2)\sin\varphi - B'(p^4-q^4) + 2D'p^2q^2, \end{array}} \\ \dfrac{y}{z} = \dfrac{\sqrt{p^4+q^4}}{p} z\cos\varphi, \qquad \dfrac{t}{z} = \dfrac{\sqrt{p^4+q^4}\sin\varphi - q^2}{p^2}. \end{cases}$$

III.

$$y^2 + p^2(z^2 - t^2) + 2q^2 z t = 0, \qquad x^2 + B'(z^2 - t^2) + 2D' z t = 0;$$

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{z} = \dfrac{1}{p^2\sin\varphi}\sqrt{\begin{array}{l} [-B'(p^4-p^4) - 2D'p^2q^2]\sin^2\varphi \\ \quad + 2\sqrt{p^4+q^4}(B'q^2 - D'p^2)\sin\varphi + B'(p^4+q^4), \end{array}} \\ \dfrac{y}{z} = \dfrac{\sqrt{p^4+q^4}}{p}\,\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}, \qquad \dfrac{t}{z} = \dfrac{q^2\sin\varphi + \sqrt{p^4+q^4}}{p^2\sin\varphi}. \end{cases}$$

IV.

$$y^2 + p^2(z^2 - t^2) - 2q^2 z t = 0, \qquad x^2 + B'(z^2 - t^2) + 2D' z t = 0;$$

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{z} = \dfrac{1}{p^2\sin\varphi}\sqrt{\begin{array}{l} [-B'(p^4-q^4) + 2D'p^2q^2]\sin^2\varphi \\ \quad - 2\sqrt{p^4+q^4}(B'q^2 + D'p^2)\sin\varphi + B'(p^4+q^4), \end{array}} \\ \dfrac{y}{z} = \dfrac{\sqrt{p^4+q^4}}{p}\,\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}, \qquad \dfrac{t}{z} = \dfrac{-q^2\sin\varphi + \sqrt{p^4+q^4}}{p^2\sin\varphi}. \end{cases}$$

Il est rappelé que les discriminants des trinomes en $\sin\varphi$ qui figurent dans les expressions de $\frac{x}{z}$ sont toujours positifs.

6. Nous allons maintenant faire disparaître les radicaux des expressions de $\frac{x}{z}$, en introduisant les fonctions elliptiques $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$.

Posons

$$\sin\varphi = \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{2\beta}{1+\beta^2}. \tag{16}$$

Dans les quatre cas (12-15), l'expression de $\frac{x}{z}$ comporte un radical de la forme

$$U = \sqrt{a\sin^2\varphi + 2b\sin\varphi + c} \qquad (b^2 - ac > 0),$$

qui devient

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{a\left(\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}\right)^2 + 2b\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} + c} \\ &= \frac{1}{1+\beta^2}\sqrt{a(1-\beta^2)^2 + 2b(1-\beta^2)(1+\beta^2) + c(1+\beta^2)^2}. \end{aligned}$$

Ici encore, plusieurs cas sont à distinguer :

1° $a > 0$. — On a

$$\begin{aligned} a(1+\beta^2)^2U^2 &= a^2(1-\beta^2)^2 + 2ab(1-\beta^2)(1+\beta^2) + ac(1+\beta^2)^2 \\ &= [a+b-(a-b)\beta^2]^2 - (b^2-ac)(1+\beta^2)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(1+\beta^2)^2U^2 = {} & \left[a+b+\sqrt{b^2-ac}-(a-b-\sqrt{b^2-ac})\beta^2\right] \\ & \times\left[a+b-\sqrt{b^2-ac}-(a-b+\sqrt{b^2-ac})\beta^2\right]. \end{aligned} \tag{17'}$$

2° $a < 0$. — Écrivons, pour un instant, $-a_1$ au lieu de a. Si

$$\begin{aligned} (1+\beta^2)^2U^2 &= -a_1(1-\beta^2)^2 + 2b(1-\beta^2)(1+\beta^2) + c(1+\beta^2)^2, \\ a_1(1+\beta^2)^2U^2 &= -a_1^2(1-\beta^2)^2 + 2a_1b(1-\beta^2)(1+\beta^2) + a_1c(1+\beta^2)^2 \\ &= -[a_1(1-\beta^2) - b(1+\beta^2)]^2 + b^2(1+\beta^2)^2 + a_1c(1+\beta^2)^2. \end{aligned}$$

ou, en revenant à a,

$$-a(1+\beta^2)^2U^2 = -[a(1-\beta^2) + b(1+\beta^2)]^2 + (b^2-ac)(1+\beta^2)^2.$$

$$\begin{aligned} -a(1+\beta^2)^2U^2 = {} & \left[-a+b+\sqrt{b^2-ac}-(-a-b-\sqrt{b^2-ac})\beta^2\right] \\ & \times\left[-a-b+\sqrt{b^2-ac}-(-a+b-\sqrt{b^2-ac})\beta^2\right]. \end{aligned} \tag{17''}$$

Il en résulte, en épuisant les combinaisons de signes possibles, que $a(1+\beta^2)^2U^2$ ou $-a(1+\beta^2)^2U^2$ (on choisira celle de ces deux expressions qui est positive) appartient à l'une des cinq formes

$$\pm a(1+\beta^2)^2U^2 = V_1^2 = (j^2+l^2\beta^2)(m^2+n^2\beta^2), \tag{18}$$

$$\pm a(1+\beta^2)^2U^2 = V_2^2 = (-j^2+l^2\beta^2)(m^2+n^2\beta^2), \tag{19}$$

$$\pm a(1+\beta^2)^2U^2 = V_3^2 = (j^2-l^2\beta^2)(m^2+n^2\beta^2), \tag{20}$$

$$\pm a(1+\beta^2)^2U^2 = V_4^2 = (j^2-l^2\beta^2)(m^2-n^2\beta^2), \tag{21}$$

$$\pm a(1+\beta^2)^2U^2 = V_5^2 = (-j^2+l^2\beta^2)(m^2-n^2\beta^2). \tag{22}$$

Les autres formes possibles se ramènent à celles-ci par des changements de signes; par exemple

$$(-j^2+l^2\beta^2)(-m^2+n^2\beta^2)=(j^2-l^2\beta^2)(m^2-n^2\beta^2),$$

ce qui est la forme (21).

Il est à remarquer cependant que *certaines de ces formes doivent être exclues*. Examinons en effet la forme V_4^2; (17) donne, par comparaison avec V_4^2,

$$j^2=a+b+\sqrt{b^2-ac},\qquad l^2=a-b-\sqrt{b^2-ac},$$
$$m^2=-a-b+\sqrt{b^2-ac},\qquad n^2=-a+b-\sqrt{b^2-ac},$$

d'où

$$(23)\qquad j^2+l^2=2a,\qquad m^2+n^2=-2a\qquad (a<0),$$

où l'égalité (23') ne peut pas avoir lieu. Rien n'exclut cependant *a priori* la forme V_4^2 si $a>0$; en effet, ici (16),

$$j^2=a+b+\sqrt{b^2-ac},\qquad l^2=a-b-\sqrt{b^2-ac},$$
$$m^2=a+b-\sqrt{b^2-ac},\qquad n^2=a-b+\sqrt{b^2-ac};$$

en fait, nous verrons que V_4^2 doit être exclue dans tous les cas, de même que V_1^2, V_3^2, sauf introduction d'imaginaires; et l'examen de ces cas sera loin d'être inutile (n^{os} **7**, 1°, 3° et 5°, puis **8**).

7. 1° *Considérons* V_4^2. — Nous avons

$$V_4^2=j^2m^2\left(1-\frac{l^2}{j^2}\beta^2\right)\left(1-\frac{n^2}{m^2}\beta^2\right).$$

Admettons ici, et dans ce qui suit, jusqu'au n° **8**, pour plus de généralité, car il se présente des problèmes qui ont un certain intérêt, qu'il n'y ait aucune relation entre j, l, m, n; en fait, pour la question posée, certaines relations existent (23).

Soit

$$(24)\qquad \frac{l^2}{j^2}<\frac{n^2}{m^2}\qquad \text{ou}\qquad \frac{l^2m^2}{j^2n^2}<1,$$

posons

$$\frac{n}{m}\beta=\operatorname{sn}u;$$

nous aurons

$$V_4^2 = j^2 m^2 \left(1 - \frac{l^2 m^2}{j^2 n^2} \times \frac{n^2}{m^2}\beta^2\right)(1 - \operatorname{sn}^2 u);$$

posons en outre (24)

$$\frac{l^2 m^2}{j^2 n^2} = k^2;$$

il viendra

$$V_4 = jm \operatorname{dn} u \operatorname{sn} u;$$

d'où (21)

$$\sqrt{\pm a}(1 + \beta^2)\mathrm{U} = jm \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

$$(25) \qquad \mathrm{U} = \frac{jm}{\sqrt{\pm a}} \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 + \frac{m^2}{n^2}\operatorname{sn}^2 u};$$

en outre (16)

$$\sin\varphi = \frac{1 - \frac{m^2}{n^2}\operatorname{sn}^2 u}{1 + \frac{m^2}{n^2}\operatorname{sn}^2 u}, \qquad \cos\varphi = \frac{2\frac{m}{n}\operatorname{sn} u}{1 + \frac{m^2}{n^2}\operatorname{sn}^2 u}.$$

Les formules (12) donnent alors

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{x}{z} = \frac{1}{p^2}\mathrm{U} = \frac{jm \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{p^2\sqrt{\pm a}\left(1 + \frac{m^2}{n^2}\operatorname{sn}^2 u\right)}, \qquad \frac{y}{z} = \frac{2\frac{j}{l}\sqrt{p^4 + q^4}\operatorname{sn} u}{p\left(1 + \frac{m^2}{n^2}\operatorname{sn}^2 u\right)}, \\ &\frac{t}{z} = \frac{\sqrt{p^4 + q^4}\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\operatorname{sn}^2 u\right) + q^2\left(1 + \frac{m^2}{n^2}\operatorname{sn}^2 u\right)}{p^2\left(1 + \frac{m^2}{n^2}\operatorname{sn}^2 u\right)}; \end{aligned} \right.$$

on aura des résultats tout à fait analogues en partant des formules (13).

Les formules (14) donnent ensuite

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{x}{z} = \frac{\mathrm{U}}{p^2 \sin\varphi} = \frac{jm \operatorname{cn} u}{p^2\sqrt{\pm a}\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\operatorname{sn}^2 u\right)}, \\ &\frac{y}{z} = \frac{\sqrt{p^4 + q^4}}{p} \times \frac{2\frac{m}{n}\operatorname{sn} u}{1 - \frac{m^2}{n^2}\operatorname{sn}^2 u}, \\ &\frac{t}{z} = \frac{\sqrt{p^4 + q^4}\left(1 + \frac{m^2}{n^2}\operatorname{sn}^2 u\right) - q^2\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\operatorname{sn}^2 u\right)}{p^2\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\operatorname{sn}^2 u\right)}; \end{aligned} \right.$$

$\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, \frac{t}{z}$ sont donc de la forme

$$(28)\qquad \frac{x}{z} = \frac{\lambda\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\omega\,\mathrm{sn}^2 u + \sigma}, \qquad \frac{y}{z} = \frac{\mu\,\mathrm{sn}\,u}{\omega\,\mathrm{sn}^2 u + \sigma}, \qquad \frac{t}{z} = \frac{\nu\,\mathrm{sn}^2 u + \rho}{\omega\,\mathrm{sn}^2 u + \sigma}.$$

2° La transformation qu'on vient de faire est une conséquence des formules

$$\mathrm{cn}^2 u = 1 - \mathrm{sn}^2 u, \qquad \mathrm{dn}^2 u = 1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 u.$$

Exprimons $\mathrm{sn}^2 u$, $\mathrm{dn}^2 u$, $\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u$ en fonction de $\mathrm{cn}^2 u$:

$$\mathrm{sn}^2 u = 1 - \mathrm{cn}^2 u,$$
$$\mathrm{dn}^2 u = k'^2 + k^2\,\mathrm{cn}^2 u,$$
$$\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u = \frac{1}{k'^2}(1 - \mathrm{cn}^2 u)\left(1 + \frac{k^2}{k'^2}\mathrm{cn}^2 u\right).$$

Cette formule va convenir à V_3^2. En effet (20),

$$V_3^2 = j^2 m^2\left(1 - \frac{l^2}{j^2}\beta^2\right)\left(1 + \frac{n^2}{m^2}\beta^2\right) = j^2 m^2\left(1 - \frac{l^2}{j^2}\beta^2\right)\left(1 + \frac{n^2}{m^2}\frac{j^2}{l^2}\frac{l^2}{j^2}\beta^2\right);$$

posons

$$\frac{l}{j}\beta = \mathrm{cn}\,u$$

et déterminons k^2 par la condition

$$\frac{n^2 j^2}{m^2 l^2} = \frac{k^2}{k'^2} = \frac{k^2}{1 - k^2},$$

d'où

$$k^2 = \frac{n^2 j^2}{n^2 j^2 + m^2 l^2};$$

V_3^2 pourra être écrit

$$V_3^2 = j^2 m^2 (1 - k^2)\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u,$$

d'où

$$(29)\qquad V_3 = jmk'\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u;$$

on pourra donc, dans le cas actuel, représenter $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, \frac{t}{z}$ par les fonctions $\mathrm{cn}\,u$ et $\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u$.

Il est bien évident que les formules finales sont les formules (28) où l'on change $\mathrm{sn}\,u$ en $\mathrm{cn}\,u$ et $\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u$ en $\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u$; donc, ici,

$$(30)\qquad \frac{x}{z} = \frac{\lambda\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\omega\,\mathrm{cn}^2 u + \sigma}, \qquad \frac{y}{z} = \frac{\mu\,\mathrm{cn}\,u}{\omega\,\mathrm{cn}^2 u + \sigma}, \qquad \frac{t}{z} = \frac{\nu\,\mathrm{cn}^2 u + \rho}{\omega\,\mathrm{cn}^2 u + \sigma}.$$

3° Exprimons maintenant $\operatorname{sn}^2 u$, $\operatorname{cn}^2 u$ et $\operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u$ en fonction de $\operatorname{dn}^2 u$. On a

$$\operatorname{sn}^2 u = \frac{1 - \operatorname{dn}^2 u}{k^2}, \qquad \operatorname{cn}^2 u = \frac{-k'^2 + \operatorname{dn}^2 u}{k^2},$$

$$\operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u = \frac{(1 - \operatorname{dn}^2 u)(-k'^2 + \operatorname{dn}^2 u)}{k^2}.$$

V_5^2 peut, à son tour, être écrit

$$V_5^2 = \frac{l^2 m^4}{n^2}\left(1 - \frac{n^2}{m^2}\beta^2\right)\left(-\frac{j^2 n^2}{l^2 m^2} + \frac{n^2}{m^2}\beta^2\right);$$

soit

$$\frac{j^2 n^2}{l^2 m^2} < 1;$$

nous pouvons poser

$$\frac{n}{m}\beta = \operatorname{dn} u, \qquad \frac{j^2 n^2}{l^2 m^2} = k'^2,$$

et nous aurons

$$V_5 = \frac{l m^2}{n} k \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u,$$

ce qui réalisera la transformation.

Si

$$\frac{j^2 n^2}{l^2 m^2} > 1,$$

nous écrirons

$$V_5^2 = \frac{j^4 n^2}{l^2}\left(1 - \frac{l^2}{j^2}\beta^2\right)\left(-\frac{m^2 l^2}{n^2 j^2} + \frac{l^2}{j^2}\beta^2\right),$$

$$\frac{l}{j}\beta = \operatorname{dn} u, \qquad \frac{m^2 l^2}{n^2 j^2} = k'^2,$$

d'où

$$V_5 = \frac{j^2 n}{l} k \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u.$$

Ici, les formules finales seront les formules (28) où l'on changera $\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$ et $\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$ en $\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u$; donc

$$(31) \qquad \frac{x}{z} = \frac{\lambda \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\omega \operatorname{dn}^2 u + \sigma}, \qquad \frac{y}{z} = \frac{\mu \operatorname{dn} u}{\omega \operatorname{dn}^2 u + \sigma}, \qquad \frac{t}{z} = \frac{\nu \operatorname{dn}^2 u + \rho}{\omega \operatorname{dn}^2 u + \sigma}.$$

4° Pour V_2^2, nous avons

$$\pm a(1+\beta^2)^2 U_2^2 = V_2^2 = (-j^2 + l^2\beta^2)(m^2 + n^2\beta^2) = \beta^4\left(-\frac{j^2}{\beta^2} + l^2\right)\left(\frac{m^2}{\beta^2} + n^2\right)$$

$$= l^2 n^2 \beta^4\left(1 - \frac{j^2}{l^2}\beta^2\right)\left(1 + \frac{m^2}{n^2}\frac{1}{\beta^2}\right);$$

posons

$$\frac{j}{l}\frac{1}{\alpha} = \operatorname{cn} u, \qquad \frac{m^2 l^2}{n^2 j^2} = \frac{k^2}{1-k^2}, \qquad \text{d'où} \qquad k^2 = \frac{m^2 l^2}{m^2 l^2 + n^2 j^2};$$

il vient

$$\pm a(1+\beta^2)^2 U_2^2 = \frac{n^2 j^4}{l^2}\frac{1}{\operatorname{cn}^4 u}(1-\operatorname{cn}^2 u)\left(1+\frac{k^2}{k'^2}\operatorname{cn}^2 u\right).$$

d'où

$$U = \frac{nj^2}{l}\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\sqrt{\pm a}\operatorname{cn}^2 u(1+\beta^2)} = \frac{nj^2}{l}\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\sqrt{\pm a}\operatorname{cn}^2 u\left(1+\frac{j^2}{l^2}\frac{1}{\operatorname{cn}^2 u}\right)},$$

$$U = \frac{nj^2}{l}\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\sqrt{\pm a}\left(\frac{j^2}{l^2}+\operatorname{cn}^2 u\right)}.$$

Nous avons ensuite

$$\sin\varphi = \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} = \frac{-\frac{j^2}{l^2}+\operatorname{cn}^2 u}{\frac{j^2}{l^2}+\operatorname{cn}^2 u},$$

$$\cos\varphi = \frac{2\frac{j}{l}\operatorname{cn} u}{\frac{j^2}{l^2}+\operatorname{cn}^2 u};$$

si nous substituons dans les formules (12) à (15), nous retrouverons les expressions (30) de $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{t}{z}$.

5° *Étudions enfin* V_1^2. — Nous avons identiquement

$$V_1^2 = j^2 m^2\left[1-\frac{l^2}{j^2}(i\beta)^2\right]\left[1-\frac{n^2}{m^2}(i\beta)^2\right] \qquad (i^2=-1);$$

soit, pour fixer les idées,

$$\frac{l^2}{j^2} > \frac{n^2}{m^2};$$

écrivons

$$V_1^2 = j^2 m^2\left[1-\left(\frac{l}{j}i\beta\right)^2\right]\left[1-\frac{n^2}{m^2}\frac{j^2}{l^2}\left(\frac{l}{j}i\beta\right)^2\right]$$

et posons

$$\frac{l}{j}i\beta = \frac{\operatorname{sn}(u, k')}{\operatorname{cn}(u, k')}, \qquad \frac{n^2 j^2}{m^2 l^2} = k^2;$$

on sait que

$$i\frac{\operatorname{sn}(u, k')}{\operatorname{cn}(u, k')} = \operatorname{sn}(ui, k);$$

donc

$$\frac{l}{j}\zeta = -\operatorname{sn}(ui, k)$$

et

$$V_1^2 = j^2 m^2 [1 - \operatorname{sn}^2(ui, k)][1 - k^2 \operatorname{sn}^2(ui, k)] = j^2 m^2 \operatorname{cn}^2(ui, k) \operatorname{dn}^2(ui, k),$$
$$V_1 = jm \operatorname{cn}(ui, k) \operatorname{dn}(ui, k).$$

Reportons-nous à V_1. Les résultats sont identiques, sauf que u est remplacé par ui; on obtiendra donc ici des formules du genre (28) avec ui au lieu de u, soit, en mettant k en évidence,

$$\frac{x}{z} = \frac{\lambda \operatorname{cn}(ui, k) \operatorname{dn}(ui, k)}{\omega \operatorname{sn}^2(ui, k) + \sigma}, \quad \frac{y}{z} = \frac{\mu \operatorname{sn}(ui, k)}{\omega \operatorname{sn}^2(ui, k) + \sigma}, \quad \frac{t}{z} = \frac{\nu \operatorname{sn}^2(ui, k) + \rho}{\omega \operatorname{sn}^2(ui, k) + \sigma};$$

or,

$$\operatorname{sn}(ui, k) = i\frac{\operatorname{sn}(u, k')}{\operatorname{cn}(u, k')}, \quad \operatorname{cn}(ui, k) = \frac{1}{\operatorname{cn}(u, k')}, \quad \operatorname{dn}(ui, k) = \frac{\operatorname{dn}(u, k')}{\operatorname{cn}(u, k')};$$

substituons dans les expressions qu'on vient d'écrire pour $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{t}{z}$; ces rapport prendront la forme (31), *mais on devra supposer μ imaginaire : cela n'a aucune importance, car nous verrons tout à l'heure que les systèmes tels que* (31) *sont impropres à représenter les quartiques z_i^2.*

En résumé, les quartiques z_i^2 peuvent être représentées par l'un des systèmes (28, 30, 31) que nous écrivons à nouveau, pour en faire une étude complète,

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x}{z} = \frac{\lambda \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\omega \operatorname{sn}^2 u + \sigma}, && \frac{y}{z} = \frac{\mu \operatorname{sn} u}{\omega \operatorname{sn}^2 u + \sigma}, && \frac{t}{z} = \frac{\nu \operatorname{sn}^2 u + \rho}{\omega \operatorname{sn}^2 u + \sigma},\\ &\frac{x}{z} = \frac{\lambda \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\omega \operatorname{dn}^2 u + \sigma}, && \frac{y}{z} = \frac{\mu \operatorname{dn} u}{\omega \operatorname{dn}^2 u + \sigma}, && \frac{t}{z} = \frac{\nu \operatorname{dn}^2 u + \rho}{\omega \operatorname{dn}^2 u + \sigma},\\ &\frac{x}{z} = \frac{\lambda \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\omega \operatorname{cn}^2 u + \sigma}, && \frac{y}{z} = \frac{\mu \operatorname{cn} u}{\omega \operatorname{cn}^2 u + \sigma}, && \frac{t}{z} = \frac{\nu \operatorname{cn}^2 u + \rho}{\omega \operatorname{cn}^2 u + \sigma}. \end{aligned}\right.$$

Étude des systèmes (32).

8. *Système* (32^1). — Portons les valeurs (32^1) de $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{t}{z}$ dans les équations (1).

Il vient successivement

$$\begin{cases} \dfrac{\mu^2 \operatorname{sn}^2 u}{(\omega \operatorname{sn}^2 u + \sigma)^2} + B\left[1 - \dfrac{(\nu \operatorname{sn}^2 u + \rho)^2}{(\omega \operatorname{sn}^2 u + \sigma)^2}\right] + 2D\,\dfrac{\nu \operatorname{sn}^2 u + \rho}{\omega \operatorname{sn}^2 u + \sigma} = 0, \\ \dfrac{\lambda^2 \operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}{(\omega \operatorname{sn}^2 u + \sigma)^2} + B'\left[1 - \dfrac{(\nu \operatorname{sn}^2 u + \rho)^2}{(\omega \operatorname{sn}^2 u + \sigma)^2}\right] + 2D'\,\dfrac{\nu \operatorname{sn}^2 u + \rho}{\omega \operatorname{sn}^2 u + \sigma} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu^2 \operatorname{sn}^2 u \qquad + B\,[(\omega \operatorname{sn}^2 u + \sigma)^2 - (\nu \operatorname{sn}^2 u + \rho)^2] \\ \qquad\qquad + 2D\,(\nu \operatorname{sn}^2 u + \rho)(\omega \operatorname{sn}^2 u + \sigma) = 0, \\ \lambda^2 \operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 u + B'[(\omega \operatorname{sn}^2 u + \sigma)^2 - (\nu \operatorname{sn}^2 u + \rho)^2] \\ \qquad\qquad + 2D'(\nu \operatorname{sn}^2 u + \rho)(\omega \operatorname{sn}^2 u + \sigma) = 0. \end{cases}$$

Exprimons que ces deux équations sont identiquement vérifiées, c'est-à-dire que les coefficients du terme indépendant de $\operatorname{sn} u$ et ceux des termes en $\operatorname{sn}^4 u$, $\operatorname{sn}^2 u$ sont nuls; nous obtenons les systèmes d'équations

$$(33) \qquad \begin{cases} B(\sigma^2 - \rho^2) + 2D\rho\sigma = 0, \\ \mu^2 + 2B(\sigma\omega - \nu\rho) + 2D(\nu\sigma + \rho\omega) = 0, \\ B(\omega^2 - \nu^2) + 2D\nu\omega = 0; \end{cases}$$

$$(34) \qquad \begin{cases} \lambda^2 + B'(\sigma^2 - \rho^2) + 2D'\rho\sigma = 0, \\ -\lambda^2(1 - k^2) + 2B'(\sigma\omega - \nu\rho) + 2D'(\nu\sigma + \rho\omega) = 0, \\ \lambda^2 k^2 + B'(\omega^2 - \nu^2) + 2D'\nu\omega = 0, \end{cases}$$

où les inconnues sont λ, μ, ν, ρ, σ, ω, ou plutôt les rapports de cinq de ces quantités à la sixième, et le module k^2 de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$.

Les équations (33^1, 33^3) donnent

$$\frac{\sigma^2 - \rho^2}{\omega^2 - \nu^2} = \frac{\rho\sigma}{\nu\omega}$$

ou

$$(\sigma\omega + \nu\rho)(\nu\sigma - \rho\omega) = 0.$$

On ne peut supposer

$$\nu\sigma - \rho\omega = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\nu}{\rho} = \frac{\omega}{\sigma} = \theta',$$

car cela conduirait à écrire l'équation (33^2)

$$\mu^2 + 2B(\sigma^2 - \rho^2)\theta' + 2D\rho\sigma\theta' = 0,$$

équation incompatible avec (33^1). Soit donc

$$\sigma\omega + \nu\rho = 0$$

ou

$$\frac{\sigma}{\nu} = \frac{-\rho}{\omega} = \theta, \qquad \sigma = \nu\theta, \qquad \rho = -\omega\theta;$$

substituons dans (34^1)

$$\lambda^2 + B'(\nu^2 - \omega^2)\theta^2 - 2D'\nu\omega\theta^2 = 0,$$

d'où (34^3)

$$k^2 = -\frac{1}{\theta^2};$$

il résulte de ceci que *l'emploi du système* (32^1) *introduit des imaginaires dans la représentation paramétrique des quartiques* ζ_1^2.

En effet, si k est réel, θ est imaginaire, et réciproquement.

Système (32^2). — Portons maintenant les expressions (32^2) de $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{t}{z}$ dans les équations (1). Il vient

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\mu^2 \operatorname{dn}^2 u}{(\omega \operatorname{dn}^2 u + \sigma)^2} + B\left[1 - \frac{(\nu \operatorname{dn}^2 u + \rho)^2}{(\omega \operatorname{dn}^2 u + \sigma)^2}\right] + 2D\,\frac{\nu \operatorname{dn}^2 u + \rho}{\omega \operatorname{dn}^2 u + \sigma} = 0,\\ &\frac{\lambda^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u}{(\omega \operatorname{dn}^2 u + \sigma)^2} + B'\left[1 - \frac{(\nu \operatorname{dn}^2 u + \rho)^2}{(\omega \operatorname{dn}^2 u + \sigma)^2}\right] + 2D'\,\frac{\nu \operatorname{dn}^2 u + \rho}{\omega \operatorname{dn}^2 u + \sigma} = 0; \end{aligned}\right.$$

ce système pourra être écrit, en vertu des relations

$$\operatorname{sn}^2 u = \frac{1 - \operatorname{dn}^2 u}{k^2}, \qquad \operatorname{cn}^2 u = \frac{-k'^2 + \operatorname{dn}^2 u}{k^2},$$

$$\left\{\begin{aligned} &\mu^2 \operatorname{dn}^2 u\\ &\quad + B\left[(\omega \operatorname{dn}^2 u + \sigma)^2 - (\nu \operatorname{dn}^2 u + \rho)^2\right] + 2D(\nu \operatorname{dn}^2 u + \rho)(\omega \operatorname{dn}^2 u + \sigma) = 0,\\ &\frac{\lambda^2}{k^2}(1 - \operatorname{dn}^2 u)(-k'^2 + \operatorname{dn}^2 u)\\ &\quad + B'\left[(\omega \operatorname{dn}^2 u + \sigma)^2 - (\nu \operatorname{dn}^2 u + \rho)^2\right] + 2D'(\nu \operatorname{dn}^2 u + \rho)(\omega \operatorname{dn}^2 u + \sigma) = 0; \end{aligned}\right.$$

d'où, comme précédemment,

$$\left\{\begin{aligned} &B(\sigma^2 - \rho^2) + 2D\rho\sigma = 0,\\ &\mu^2 + 2B(\sigma\omega - \nu\rho) + 2D(\nu\sigma + \rho\omega) = 0,\\ &B(\omega^2 - \nu^2) + 2D\nu = 0. \end{aligned}\right.$$

et cela suppose, comme on l'a vu à propos du système (32^1),

$$\sigma = \nu\theta, \qquad \rho = -\omega\theta, \tag{35}$$

puis

$$\left\{\begin{aligned} &-\frac{\lambda^2 k'^2}{k^4} + B'(\sigma^2 - \nu^2) + 2D'\rho\sigma = 0,\\ &\frac{\lambda^2}{k^4}(1 + k'^2) + 2B'(\sigma\omega - \nu\rho) + 2D'(\nu\sigma + \rho\omega) = 0,\\ &-\frac{\lambda^2}{k^4} + B'(\omega^2 - \nu^2) + 2D'\nu\omega = 0. \end{aligned}\right. \tag{36}$$

Remplaçons, dans (36^1), σ et ρ par leurs valeurs (35). Il vient

$$-\frac{\lambda^2 k'^2}{k^4} + B'(\nu^2 - \omega^2)\theta^2 - 2D'\nu\omega\theta = 0;$$

la comparaison avec (36^3) donne

$$k'^2 = -\theta^2,$$

et *l'emploi du système* (32^2) *introduit encore des imaginaires.*

Nous allons voir que *le système* (32^3) *n'introduit pas d'imaginaires.* On peut donc dire, dans un certain sens, que *les systèmes* (32^1, 32^2) *sont impropres à la représentation des quartiques* γ_1^2.

Étude spéciale du système (32^3).

9. Nous avons ici, en portant les valeurs (32^3) de $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{t}{z}$ dans les équations (1) :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\mu^2 \operatorname{cn}^2 u}{(\omega \operatorname{cn}^2 u + \sigma)^2} + B\left[1 - \frac{(\nu \operatorname{cn}^2 u + \rho)^2}{(\omega \operatorname{cn}^2 u + \sigma)^2}\right] + 2D\,\frac{\nu \operatorname{cn}^2 u + \rho}{\omega \operatorname{cn}^2 u + \sigma} = 0,\\ &\frac{\lambda^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}{(\omega \operatorname{cn}^2 u + \sigma)^2} + B'\left[1 - \frac{(\nu \operatorname{cn}^2 u + \rho)^2}{(\omega \operatorname{cn}^2 u + \sigma)^2}\right] + 2D'\,\frac{\nu \operatorname{cn}^2 u + \rho}{\omega \operatorname{cn}^2 u + \sigma} = 0; \end{aligned}\right.$$

les relations

$$\operatorname{sn}^2 u = 1 - \operatorname{cn}^2 u, \qquad \operatorname{dn}^2 u = k'^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 u$$

permettent d'écrire le système précédent

$$\left\{\begin{aligned} &\mu^2 \operatorname{cn}^2 u + B[(\omega \operatorname{cn}^2 u + \sigma)^2 - (\nu \operatorname{cn}^2 u + \rho)^2] + 2D(\nu \operatorname{cn}^2 u + \rho)(\omega \operatorname{cn}^2 u + \sigma) = 0,\\ &\lambda^2(1 - \operatorname{cn}^2 u)(k'^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 u)\\ &\quad + B'[(\omega \operatorname{cn}^2 u + \sigma)^2 - (\nu \operatorname{cn}^2 u + \rho)^2] + 2D'(\nu \operatorname{cn}^2 u + \rho)(\omega \operatorname{cn}^2 u + \sigma) = 0; \end{aligned}\right.$$

d'où les deux systèmes d'équations

$$(37)\quad \left\{\begin{array}{c} B(\sigma^2-\rho^2)+2D\rho\sigma=0,\\ \mu^2+2B(\sigma\omega-\nu\rho)+2D(\nu\sigma+\rho\omega)=0,\\ B(\omega^2-\nu^2)+2D\nu\omega=0;\end{array}\right.$$

$$(38)\quad \left\{\begin{array}{c} \lambda^2k'^2+B'(\sigma^2-\rho^2)+2D'\rho\sigma=0,\\ \lambda^2(k^2-k'^2)+2B'(\sigma\omega-\nu\rho)+2D'(\nu\sigma+\rho\omega)=0,\\ -\lambda^2k^2+B'(\omega^2-\nu^2)+2D'\nu\omega=0.\end{array}\right.$$

Pour les mêmes raisons que tout à l'heure, nous serons encore conduits à poser

$$(39)\qquad \sigma=\nu\theta,\qquad \rho=-\omega\theta;$$

(37^1, 37^3) deviendront identiques, (38^1) deviendra

$$\frac{\lambda^2k'^2}{\theta^2}+2B'(\nu^2-\omega^2)-2D'\nu\omega=0,$$

d'où (38^3)

$$k^2=\frac{k'^2}{\theta^2},$$

c'est-à-dire

$$(40^1)\qquad k^2=\frac{1}{1+\theta^2};$$

nous allons trouver une valeur réelle pour θ : *le système* (32^3) *conviendra à la représentation des quartiques* ς_4^2.

Ici,

$$(40^2)\qquad k^2-k'^2=2k^2-1=\frac{2}{1+\theta^2}-1=\frac{1-\theta^2}{1+\theta^2};$$

les systèmes (37, 38) [où (37^1, 37^3) sont devenues identiques, ainsi que (38^1, 38^3) quand on a écrit les relations (39, 40)] se réduisent au système suivant, formé de (37^2, 37^3, 38^2, 38^3),

$$(41)\quad \left\{\begin{array}{c} \mu^2+2B(\sigma\omega-\nu\rho)+2D(\nu\sigma+\rho\omega)=0.\\ B(\omega^2-\nu^2)+2D\nu\omega=0,\\ \lambda^2(k^2-k'^2)+2B'(\sigma\omega-\nu\rho)+2D'(\nu\sigma+\rho\omega)=0,\\ -\lambda^2k^2+B'(\omega^2-\nu^2)+2D'\nu\omega=0;\end{array}\right.$$

remplaçons k^2, k'^2 par leurs valeurs (40) et σ et ρ par leurs valeurs (39);

cela donne

$$\sigma\omega - \nu\rho = \nu\theta\omega + \nu\omega\theta = 2\nu\omega\theta,$$
$$\nu\sigma + \rho\omega = \nu^2\theta - \omega^2\theta = (\nu^2 - \omega^2)\theta,$$

puis

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} &\mu^2 + 4B\nu\omega\theta + 2D(\nu^2 - \omega^2)\theta = 0,\\ &B(\omega^2 - \nu^2) + 2D\nu\omega = 0,\\ &\lambda^2\frac{1-\theta^2}{1+\theta^2} + 4B'\nu\omega\theta + 2D'(\nu^2 - \omega^2)\theta = 0.\\ &-\lambda^2\frac{1}{1+\theta^2} + B'(\omega^2 - \nu^2) + 2D'\nu\omega = 0.\end{aligned}\right.$$

Éliminons λ entre les deux dernières équations. Nous aurons

$$[2D'\theta + B'(1-\theta^2)](\nu^2 - \omega^2) + 2[2B'\theta + D'(1-\theta^2)]\nu\omega = 0.$$

La comparaison avec (42²) donne

$$\frac{2D'\theta + B'(1-\theta^2)}{-B} = \frac{2B'\theta + D'(1-\theta^2)}{D}$$

ou bien

$$(B'D + BD')(\theta^2 - 1) - 2(DD' + BB')\theta = 0$$

ou encore

$$(BD' + B'D)\theta^2 - 2(BB' + DD')\theta - (BD' + B'D) = 0.$$

On en déduit

$$(43)\qquad \theta = \frac{BB' + DD' \pm \sqrt{(BB' + DD')^2 + (BD' + B'D)^2}}{BD' + B'D};$$

les deux valeurs θ_1, θ_2 de θ sont réelles : l'une est positive, l'autre est négative.

L'une quelconque de ces valeurs rend identiques les équations (42³, 42⁴) et le système (42) se réduit au suivant, formé par les équations (42¹, 42², 42⁴) :

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} &\mu^2 + 4B\nu\omega\theta - 2D(\omega^2 - \nu^2)\theta = 0,\\ &B(\omega^2 - \nu^2) + 2D\nu\omega = 0,\\ &-\frac{\lambda^2}{1+\theta^2} + B'(\omega^2 - \nu^2) + 2D'\nu\omega = 0;\end{aligned}\right.$$

on écrira ces équations, en éliminant $\omega^2 - \nu^2$ entre la première et la deuxième, puis entre la deuxième et la troisième, et en écrivant

d'abord, à nouveau l'équation (44²)

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\omega^2}{\nu^2} + 2\frac{D}{B}\frac{\omega}{\nu} - 1 = 0, \\ &B\frac{\mu^2}{\nu^2} + 4(B^2 + D^2)\frac{\omega}{\nu}\theta = 0, \\ &\frac{\lambda^2 B}{\nu^2(1+\theta^2)} + 2(BD' - B'D)\frac{\omega}{\nu} = 0. \end{aligned}\right.$$

On tire de ces équations

$$(45)\qquad \left(\frac{\omega}{\nu}\right)_1 = -\frac{D}{B} + \sqrt{1 + \frac{D^2}{B^2}}, \qquad \left(\frac{\omega}{\nu}\right)_2 = -\frac{D}{B} - \sqrt{1 + \frac{D^2}{B^2}},$$

$$(46)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left[\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)_1\right]^2 = 2(1+\theta^2)\frac{BD' - B'D}{B}\left(\frac{\omega}{\nu}\right)_1, \\ &\left[\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)_2\right]^2 = 2(1+\theta^2)\frac{BD' - B'D}{B}\left(\frac{\omega}{\nu}\right)_2, \end{aligned}\right.$$

$$(47)\qquad \left[\left(\frac{\mu}{\nu}\right)_1\right]^2 = -4\frac{B^2 + D^2}{B}\left(\frac{\omega}{\nu}\right)_1\theta, \qquad \left[\left(\frac{\mu}{\nu}\right)_2\right]^2 = -4\frac{B^2 + D^2}{B}\left(\frac{\omega}{\nu}\right)_2\theta.$$

Quel que soit le signe de $\frac{BD' - B'D}{B}$, l'une des deux valeurs de $\frac{\lambda}{\nu}$ est réelle puisque $\left(\frac{\omega}{\nu}\right)_1$, $\left(\frac{\omega}{\nu}\right)_2$ sont de signes contraires; le choix à fa[illegible] entre $\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)_1$ et $\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)_2$ précisera la valeur de $\frac{\omega}{\nu}$ qu'il faut prendre; on el[illegible]sira ensuite pour θ l'une des deux valeurs (43), θ_1 ou θ_2, de [illegible] manière que $\frac{\mu}{\nu}$, donné par l'une des équations (47), soit réel; θ [illegible] déterminé, k^2 le sera, indépendamment d'ailleurs de la valeur [illegible] choisie.

On remarquera que *chacune des inconnues n'est susceptible que d'une seule détermination, quand on évite les imaginaires, et que cette détermination est toujours possible.*

Les équations (39) donnent ensuite $\frac{\sigma}{\nu}$ et $\frac{\rho}{\nu}$ $\left(\frac{\rho}{\nu} = -\frac{\omega}{\nu}\theta\right)$.

En échangeant, s'il y a lieu, x et y, toutes les quartiques φ_i^2 représentées par les équations (1) *peuvent donc être représentées par un système de la forme*

$$(48)\qquad \frac{x}{z} = \frac{\lambda\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\omega\,\mathrm{cn}^2 u + \sigma}, \qquad \frac{y}{z} = \frac{\mu\,\mathrm{cn}\,u}{\omega\,\mathrm{cn}^2 u + \sigma}, \qquad \frac{t}{z} = \frac{\nu\,\mathrm{cn}^2 u + \rho}{\omega\,\mathrm{cn}^2 u + \sigma}, \qquad k^2 = \frac{1}{1+\theta^2},$$

où θ, $\frac{\lambda}{\nu}$, $\frac{\mu}{\nu}$, $\frac{\rho}{\nu}$, $\frac{\omega}{\nu}$, $\frac{\sigma}{\nu}$ *sont réels et calculables en fonction de* B, D, B′, D′. *Si l'on exclut les éléments imaginaires, la représentation* (48) *est unique de son espèce.*

10. Théorème. — *Tout système de la forme* (48) *représente une quartique* γ_1^2, *pourvu qu'il existe entre* ν, ρ, σ, ω *la relation*

$$\nu\rho + \sigma\omega = 0. \tag{49}$$

Revenons aux équations de condition (37, 38) et regardons B, D, B′, D′ comme les inconnues. Les conditions de compatibilité sont remplies si la relation (49) est vérifiée, ou bien si (39) σ et ρ sont respectivement de la forme

$$\sigma = \nu\theta, \qquad \rho = -\omega\theta,$$

puisque ces six équations se réduisent alors à quatre équations, qui sont celles constituant le système (41).

Les équations (48) peuvent ainsi être écrites

$$\frac{x}{\lambda \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u} = \frac{y}{\mu \operatorname{cn} u} = \frac{z}{\omega \operatorname{cn}^2 u + \nu\theta} = \frac{t}{\nu \operatorname{cn}^2 u - \omega\theta},$$

ou bien

$$\frac{x}{\frac{\lambda}{\nu} \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u} = \frac{y}{\frac{\mu}{\nu} \operatorname{cn} u} = \frac{z}{\frac{\omega}{\nu} \operatorname{cn}^2 u + \theta} = \frac{t}{\operatorname{cn}^2 u - \frac{\omega}{\nu}\theta},$$

ou encore, en écrivant λ, μ, ω pour $\frac{\lambda}{\nu}$, $\frac{\mu}{\nu}$, $\frac{\omega}{\nu}$,

$$\frac{x}{\lambda \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u} = \frac{y}{\mu \operatorname{cn} u} = \frac{z}{\omega \operatorname{cn}^2 u + \theta} = \frac{t}{\operatorname{cn}^2 u - \omega\theta} \qquad \left(k^2 = \frac{1}{1+\theta^2}\right); \tag{50}$$

les équations (50) *représentent donc les quartiques* γ_1^2 *et représentent toutes les quartiques* γ_1^2; *les éléments* λ, μ, ω, θ *sont réels et quelconques. On obtient deux autres représentations en échangeant* $\operatorname{cn} u$ *avec* $\operatorname{sn} u$ *et* $\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u$ *avec* $\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$, *puis*, toujours dans les formules (50), $\operatorname{cn} u$ *avec* $\operatorname{dn} u$ *et* $\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u$ *avec* $\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u$, *mais ces deux représentations introduisent des imaginaires.*

Il n'existe pas d'autres représentations des quartiques γ_1^2 *par les fonctions* $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$.

Chapitre III. — Quartiques φ_4^3.

11. La caractéristique des quartiques φ_4^3 est que les quatre cônes sont imaginaires. Leurs sommets le sont aussi. Les équations de ces courbes peuvent être ramenées à la forme [1]

$$(1)\qquad \begin{cases} a_1(x^2-y^2)+c_1(z^2-t^2)+2b_1xy+2d_1zt=0, \\ a_2(x^2-y^2)+c_2(z^2-t^2)+2b_2xy+2d_2zt=0. \end{cases}$$

Nous pouvons résoudre ce système par rapport à x^2-y^2, $2xy$ et le remplacer par celui-ci :

$$(2)\qquad \begin{cases} x^2-y^2=b(z^2-t^2)+2dzt, \\ 2xy \quad =e(z^2-t^2)+2hzt. \end{cases}$$

Posons

$$(3)\qquad t=\alpha z \qquad \text{ou} \qquad \frac{t}{z}=\alpha;$$

les équations (2) deviennent

$$(4)\qquad \begin{cases} x^2-y^2=[b(1-\alpha^2)+2d\alpha]z^2=Az^2, \\ 2xy \quad =[e(1-\alpha^2)+2h\alpha]z^2=Bz^2, \end{cases}$$

d'où

$$(5)\qquad x^2+y^2=\sqrt{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}=\sqrt{A^2+B^2}\,z^2;$$

x^2 et y^2 sont ainsi déterminés par les deux équations (4', 5) qui donnent

$$\sqrt{2}\frac{x}{z}=\sqrt{A+\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad \sqrt{2}\frac{y}{z}=\sqrt{-A+\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Remplaçons A, B par leurs valeurs (4); il vient, en écrivant à nouveau la relation (3),

$$(6)\qquad \begin{cases} \sqrt{2}\dfrac{x}{z}=\sqrt{b(1-\alpha^2)+2d\alpha+\sqrt{[b(1-\alpha^2)+2d\alpha]^2+[e(1-\alpha^2)+2h\alpha]^2}}, \\ \sqrt{2}\dfrac{y}{z}=\sqrt{-[b(1-\alpha^2)+2d\alpha]+\sqrt{[b(1-\alpha^2)+2d\alpha]^2+[e(1-\alpha^2)+2h\alpha]^2}}, \\ \dfrac{t}{z}=\alpha, \end{cases}$$

---

[1] Painvin, *loc. cit.*

relations qui réalisent une représentation paramétrique de x, y, z, t. Il n'y figure pas d'imaginaires.

12. Nous avons aussi (4^2, 5)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{x}{z}+\frac{y}{z} &= \sqrt{B+\sqrt{A^2+B^2}} = \sqrt{\frac{B+iA}{2}}+\sqrt{\frac{B-iA}{2}},\\ i\left(\frac{x}{z}-\frac{y}{z}\right) &= \sqrt{B-\sqrt{A^2+B^2}} = \sqrt{\frac{B+iA}{2}}-\sqrt{\frac{B-iA}{2}},\end{aligned}\right.$$

ou, en remplaçant A et B par leurs valeurs (4),

$$\left\{\begin{aligned} \sqrt{2}\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right) &= \sqrt{[e(1-\alpha^2)+2h\alpha]+i[b(1-\alpha^2)+2d\alpha]}\\ &\quad+\sqrt{[e(1-\alpha^2)+2h\alpha]-i[b(1-\alpha^2)+2d\alpha]},\\ i\sqrt{2}\left(\frac{x}{z}-\frac{y}{z}\right) &= \sqrt{[e(1-\alpha^2)+2h\alpha]+i[b(1-\alpha^2)+2d\alpha]}\\ &\quad-\sqrt{[e(1-\alpha^2)+2h\alpha]-i[b(1-\alpha^2)+2d\alpha]};\end{aligned}\right.$$

effectuant les réductions, il vient

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned} \sqrt{2}\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right) &= \sqrt{-(e+ib)\alpha^2+2(h+id)\alpha+e+ib}\\ &\quad+\sqrt{(-e+ib)\alpha^2+2(h-id)\alpha+e-ib},\\ i\sqrt{2}\left(\frac{x}{z}-\frac{y}{z}\right) &= \sqrt{-(e+ib)\alpha^2+2(h+id)\alpha+e+ib}\\ &\quad-\sqrt{(-e+ib)\alpha^2+2(h-id)\alpha+e-ib}.\end{aligned}\right.$$

Soit α_0 une racine de l'équation

$$-(e+ib)\alpha^2+2(h+id)\alpha+e+ib=0;$$

posons

$$(8)\qquad \beta.\beta=\beta^2=-(e+ib)\alpha^2+2(h+id)\alpha+e+ib;$$

nous avons, d'après la définition de α_0,

$$(9)\qquad 0=-(e+ib)\alpha_0^2+2(h+id)\alpha_0+e+ib,$$

et (8, 9)

$$(10)\qquad \beta.\beta=-(e+ib)(\alpha^2-\alpha_0^2)+2(h+id)(\alpha-\alpha_0);$$

posons encore

$$\beta = \rho(\alpha - \alpha_0);$$

l'équation (10) devient

$$\beta\rho = -(e+ib)(\alpha+\alpha_0) + 2(h+id).$$

Les quantités α, β sont ainsi déterminées en fonction de ρ par les équations

$$\left\{\begin{aligned} &\rho\alpha - \beta = \rho\alpha_0, \\ &(e+ib)\alpha + \rho\beta = -(e+ib)\alpha_0 + 2(h+id) \end{aligned}\right.$$

et sont de la forme

$$(11) \qquad \alpha = \frac{C\rho^2 + D}{\rho^2 + E}, \qquad \beta = \frac{F\rho}{\rho^2 + E},$$

de telle sorte que (7, 8)

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right) &= \beta + \sqrt{(-e+ib)\alpha^2 + 2(h+id)\alpha + e - ib} \\ &= \frac{F\rho}{\rho^2+E} + \sqrt{(-e+ib)\left(\frac{C\rho^2+D}{\rho^2+E}\right)^2 + 2(h+id)\frac{C\rho^2+D}{\rho^2+E} + e - ib}. \end{aligned}$$

$$(12) \quad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{2}\left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right) = \frac{F\rho + \sqrt{(-e+ib)(C\rho^2+D)^2 + 2(h+id)(C\rho^2+D)(\rho^2+E) + (e-ib)(\rho^2+E)^2}}{\rho^2+E}, \\ &i\sqrt{2}\left(\frac{x}{z} - \frac{y}{z}\right) = \frac{F\rho - \sqrt{(-e+ib)(C\rho^2+D)^2 + 2(h+id)(C\rho^2+D)(\rho^2+E) + (e-ib)(\rho^2+E)^2}}{\rho^2+E}. \end{aligned}\right.$$

15. En prenant pour ω un facteur de proportionnalité convenable, nous pourrons écrire, comme pour les quartiques φ_1^2, l'un des trois systèmes

$$(\mathrm{I}) \quad \omega\rho = \operatorname{sn} u, \qquad \frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \frac{2p \operatorname{sn} u + 2q \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{r \operatorname{sn}^2 u + s}, \qquad i\left(\frac{x}{z} - \frac{y}{z}\right) = \frac{2p \operatorname{sn} u - 2q \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{r \operatorname{sn}^2 u + s},$$

$$(\mathrm{II}) \quad \omega\rho = \operatorname{cn} u, \qquad \frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \frac{2p \operatorname{cn} u + 2q \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{r \operatorname{cn}^2 u + s}, \qquad i\left(\frac{x}{z} - \frac{y}{z}\right) = \frac{2p \operatorname{cn} u - 2q \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{r \operatorname{sn}^2 u + s},$$

$$(\mathrm{III}) \quad \omega\rho = \operatorname{dn} u, \qquad \frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \frac{2p \operatorname{dn} u + 2q \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{r \operatorname{dn}^2 u + s}, \qquad i\left(\frac{x}{z} - \frac{y}{z}\right) = \frac{2p \operatorname{dn} u - 2q \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{r \operatorname{sn}^2 u + s},$$

sous condition, en raison de la présence d'imaginaires, de justifier *a posteriori* cette introduction des fonctions sn, cn, dn.

Étude du système (I).

14. Le système (I) donne

$$\frac{x}{z} - \frac{y}{z} = \frac{-2ip\,\mathrm{sn}\,u + 2iq\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{r\,\mathrm{sn}^2 u + s};$$

par conséquent,

$$(13^{1,2})\quad \begin{cases} \dfrac{x}{z} = \dfrac{p(1-i)\,\mathrm{sn}\,u + q(1+i)\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{r\,\mathrm{sn}^2 u + s}, \\[2ex] \dfrac{y}{z} = \dfrac{p(1+i)\,\mathrm{sn}\,u + q(1-i)\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{r\,\mathrm{sn}^2 u + s}; \end{cases}$$

de plus, (3, 11[1]), $\frac{t}{z}$ est lui-même de la forme

$$(13^3)\qquad \frac{t}{z} = \frac{m\,\mathrm{sn}^2 u + n}{r\,\mathrm{sn}^2 u + s}.$$

Portons ces valeurs de $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{t}{z}$ dans les équations (2). Il vient successivement

$$\frac{x^2}{z^2} - \frac{y^2}{z^2} = \left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right)\left(\frac{x}{z} - \frac{y}{z}\right) = -4i\,\frac{(p\,\mathrm{sn}\,u + q\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)(p\,\mathrm{sn}\,u - q\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)}{(r\,\mathrm{sn}^2 u + s)^2}$$

$$= \frac{4ip^2\,\mathrm{sn}^2 u - 4iq^2\,\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u}{(r\,\mathrm{sn}^2 u + s)^2},$$

$$\frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} = \frac{[p(1-i)\,\mathrm{sn}\,u + q(1+i)\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u][p(1+i)\,\mathrm{sn}\,u + q(1-i)\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u]}{(r\,\mathrm{sn}^2 u + s)^2}$$

$$= \frac{4p^2\,\mathrm{sn}^2 u + 4q^2\,\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u}{(r\,\mathrm{sn}^2 u + s)^2}$$

et

$$-\frac{4ip^2\,\mathrm{sn}^2 u + 4iq^2\,\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u}{(r\,\mathrm{sn}^2 u + s)^2} = b\left[1 - \frac{(m\,\mathrm{sn}^2 u + n)^2}{(r\,\mathrm{sn}^2 u + s)^2}\right] + 2d\,\frac{m\,\mathrm{sn}^2 u + n}{r\,\mathrm{sn}^2 u + s},$$

$$\frac{4p^2\,\mathrm{sn}^2 u + 4q^2\,\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u}{(r\,\mathrm{sn}^2 u + s)^2} = c\left[1 - \frac{(m\,\mathrm{sn}^2 u + n)^2}{(r\,\mathrm{sn}^2 u + s)^2}\right] + 2h\,\frac{m\,\mathrm{sn}^2 u + n}{r\,\mathrm{sn}^2 u + s};$$

d'où, en réduisant,

$$(14)\quad \begin{cases} -4ip^2\,\mathrm{sn}^2 u + 4iq^2(1 - \mathrm{sn}^2 u)(1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 u) \\ \quad - b\,[(r\,\mathrm{sn}^2 u + s)^2 - (m\,\mathrm{sn}^2 u + n)^2] - 2d(m\,\mathrm{sn}^2 u + n)(r\,\mathrm{sn}^2 u + s) = 0, \\[2ex] 4p^2\,\mathrm{sn}^2 u + 4q^2(1 - \mathrm{sn}^2 u(1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 u) \\ \quad - c\,[(r\,\mathrm{sn}^2 u + s)^2 - (m\,\mathrm{sn}^2 u + n)^2] - 2h(m\,\mathrm{sn}^2 u + n)(r\,\mathrm{sn}^2 u + s) = 0. \end{cases}$$

Exprimons que ces équations sont des identités. Il vient

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &4iq^2 - b(s^2 - n^2) - 2dns = 0,\\ &-4ip^2 - 4iq^2(1+k^2) - 2b(rs - mn) - 2d(ms + nr) = 0,\\ &4iq^2k^2 - b(r^2 - m^2) - 2dmr = 0;\end{aligned}\right.$$

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &4q^2 - e(s^2 - n^2) - 2hns = 0,\\ &4p^2 - 4q^2(1+k^2) - 2e(rs - mn) - 2h(ms + nr) = 0,\\ &4q^2k^2 - e(r^2 - m^2) - 2hmr = 0,\end{aligned}\right.$$

équations qui vont déterminer m, n, p, q, r, s et k^2.

Éliminons q^2 entre $(15^1, 15^3)$, puis entre $(16^1, 16^3)$; il vient

$$b[(s^2 - n^2)k^2 - (r^2 - m^2)] + 2d(nsk^2 - mr) = 0,$$
$$e[(s^2 - n^2)k^2 - (r^2 - m^2)] + 2h(nsk^2 - mr) = 0,$$

équations qui nécessitent

$$nsk^2 - mr = 0, \qquad (s^2 - n^2)k^2 - (r^2 - m^2) = 0;$$

la première équation donne

$$(17)\qquad k^2 = \frac{mr}{ns},$$

puis, en portant cette valeur de k^2 dans la seconde,

$$(s^2 - n^2)\frac{mr}{ns} - (r^2 - m^2) = 0,$$

ou bien

$$(ms - nr)(mn + rs) = 0.$$

1° Soit

$$ms - nr = 0,$$

ce qu'on écrira

$$(18)\qquad n = m\theta', \qquad s = r\theta';$$

ces valeurs, attribuées à n, s, rendent identiques les équations $(15^1, 15^3)$ et $(16^1, 16^3)$; de plus (17, 18),

$$k^2 = \frac{1}{\theta'^2};$$

les systèmes (15, 16) se réduisent dès lors à celui-ci :

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &4iq^2k^2 - b(r^2 - m^2) - 2dmr = 0,\\ &-4ip^2 - 4iq^2(1+k^2) - 2b(r^2 - m^2)\frac{1}{k} - 4dmr\frac{1}{k} = 0,\\ &4q^2k^2 - e(r^2 - m^2) - 2hmr = 0,\\ &4p^2 - 4q^2(1+k^2) - 2e(r^2 - m^2)\frac{1}{k} - 4hmr\frac{1}{k} = 0,\end{aligned}\right.$$

Les équations (19^1, 19^2) donnent, en retranchant de la première la seconde multipliée par $\frac{k}{2}$,

$$4iq^2k^2 = k[-2ip^2 - 2iq^2(1+k^2)],$$
$$2q^2k + p^2 + q^2(1+k^2) = 0,$$
$$(20) \qquad p^2 + q^2(1+k)^2 = 0;$$

les équations (19^3, 19^4) donnent de même

$$4q^2k^2 = [2p^2 - 2q^2(1+k^2)]k$$

ou

$$-p^2 + q^2(1+k^2) = 0,$$

relation incompatible avec (20). *Nous ne pouvons donc pas faire l'hypothèse* (18).

15. 2° Par conséquent,

$$(21) \qquad mn + rs = 0 \qquad \text{ou} \qquad m = r\theta, \quad s = -n\theta.$$

Ici, (17, 21)

$$(22) \qquad k^2 = -\frac{r^2}{n^2},$$

et les systèmes (15, 16) se réduisent encore aux équations (15^1, 15^2, 16^1, 16^2); comme (21)

$$s^2 - n^2 = n^2(\theta^2 - 1), \qquad ns = -n^2\theta,$$
$$rs - mn = -2nr\theta, \qquad ms + nr = -nr(\theta^2 - 1),$$

ces équations (15^1, 15^2, 16^1, 16^2) s'écrivent

$$(23) \qquad \left\{ \begin{aligned} &4iq^2 - bn^2(\theta^2 - 1) + 2dn^2\theta = 0, \\ -2ip^2 - &2iq^2(1+k^2) + 2bnr\theta + dn^2(\theta^2 - 1) = 0, \\ &4q^2 - en^2(\theta^2 - 1) + 2hn^2\theta = 0, \\ 2p^2 - &2q^2(1+k^2) + 2enr\theta + hnr(\theta^2 - 1) = 0. \end{aligned} \right.$$

Les équations (23^1, 23^3) donnent, en éliminant q^2,

$$(24) \qquad -b(\theta^2 - 1) + 2d\theta = -ie(\theta^2 - 1) + 2ih\theta,$$
$$(25) \qquad (-b + ie)\theta^2 + 2(d - ih)\theta + b - ie = 0,$$

équation qui détermine θ et peut remplacer (23^1). Dans les autres équations (23), nous remplacerons (24) $\theta^2 - 1$ par $2\frac{d - ih}{b - ie}\theta$ et il

viendra

$$\left\{\begin{aligned} &-ip^2 - iq^2(1+k^2) + b\,nr\,\theta + d\,nr\frac{d-ih}{b-ie}\theta = 0,\\ &2q^2 - en^2\frac{d-ih}{b-ie}\theta + h\,n^2\theta = 0,\\ &p^2 - q^2(1+k^2) + e\,nr\,\theta + h\,nr\frac{d-ih}{b-ie}\theta = 0. \end{aligned}\right.$$

ou, en réunissant les termes en θ,

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} &-ip^2 - iq^2(1+k^2) + nr\left(b + d\frac{d-ih}{b-ie}\right)\theta = 0,\\ &2q^2 - \frac{ed-bh}{b-ie}n^2\theta = 0,\\ &p^2 - q^2(1+k^2) + nr\left(e + h\frac{d-ih}{b-ie}\right)\theta = 0. \end{aligned}\right.$$

Éliminons p^2 entre (26^1) et (26^3); nous aurons

$$-2iq^2(1+k^2) + nr\frac{b^2+e^2+d^2+h^2}{b-ie}\theta = 0$$

ou

$$-2i\frac{q^2}{n^2}(1+k^2) + \frac{r}{n}\frac{b^2+e^2+d^2+h^2}{b-ie}\theta = 0;$$

si nous remplaçons $2\frac{q^2}{n^2}$ par sa valeur tirée de (26^2), il vient

$$-i(ed-bh)(1+k^2) + \frac{r}{n}(b^2+e^2+d^2+h^2) = 0,$$

ou (22), en remplaçant $\frac{r}{n}$ par ik,

$$(ed-bh)(1+k^2) - k(b^2+e^2+d^2+h^2) = 0,$$

$$(27)\qquad (ed-bh)k^2 - (b^2+e^2+d^2+h^2)k + (ed-bh) = 0.$$

Cette équation, qui détermine k, est *fondamentale*.

Elle donne pour k une valeur *réelle*, puisqu'on en peut écrire le discriminant

$$\begin{aligned} &(b^2+e^2+d^2+h^2)^2 - 4(ed-bh)^2\\ &\quad = (b^2+e^2+d^2+h^2+2ed-2bh)(b^2+e^2+d^2+h^2-2ed+2bh),\\ &\quad = [(d+e)^2+(b-h)^2][(d-e)^2+(b+h)^2]; \end{aligned}$$

de plus, une des deux valeurs de k est comprise entre -1 et $+1$,

puisque

$$f(-1)f(+1)=[2(ed-bh)+b^2+e^2+d^2+h^2][2(ed-bh)-(b^2+e^2+d^2+h^2)]$$
$$=-[(d+e)^2+(b-h)^2][(d-e)^2+(b+h)^2].$$

Les fonctions sn u, cn u, dn u *seront donc bien dans les conditions ordinaires* ($0<k^2$ réel <1).

Nous pouvons maintenant calculer $\frac{p^2}{n^2}$, en éliminant q^2 entre (26^1, 26^3) :

$$2ip^2-nr\left[(b-ie)+(d-ih)\frac{d-ih}{b-ie}\right]\theta=0,$$
$$2i\frac{p^2}{n^2}=\frac{(b-ie)^2+(d-ih)^2}{b-ie}\theta\frac{r}{n},$$

ou, en remplaçant encore $\frac{r}{n}$ par ik (22),

$$\frac{p^2}{n^2}=\frac{1}{2}\frac{(b-ie)^2+(d-ih)^2}{b-ie}\theta k; \tag{28}$$

on a aussi (26^2)

$$\frac{q^2}{n^2}=\frac{1}{2}\frac{ed-bh}{b-ie}\theta. \tag{29}$$

Enfin (22)

$$\frac{r^2}{n^2}=-k^2 \tag{30}$$

et (21)

$$\frac{m}{n}=\frac{r}{n}\theta=ik\theta, \tag{31}$$

$$\frac{s}{n}=-\theta; \tag{32}$$

il est rappelé que k, θ sont respectivement déterminés par les équations (27, 25).

Les problèmes de la représentation des quartiques $\mathfrak{T}_1^3$ *pour les fonctions* sn u, cn u, dn u *est donc résolu par les formules* (13, p. 107) : *mais* $\frac{p}{n}$, $\frac{q}{n}$, $\frac{r}{n}$, $\frac{m}{n}$, $\frac{s}{n}$ *sont des quantités complexes* (28 à 32). *Par contre, le module* k^2 *de* sn u, cn u, dn u *est compris entre* 0 *et* 1.

16. Invariant des quartiques $\mathfrak{T}_1^3$. — Le rapport

$$+\frac{b^2+e^2+d^2+h^2}{ed-bh},$$

qui définit k (27), joue, dans un certain sens, le rôle d'*invariant* relativement aux quartiques φ_4^3.

1° Revenons en effet aux équations (9) et formons les transformées que voici :

a. Échangeons x et y; le système devient

$$x^2 - y^2 = -b(z^2 - t^2) - 2dzt, \qquad 2xy = e(z^2 - t^2) + 2hzt;$$

b. Échangeons z et t; il vient

$$x^2 - y^2 = -b(z^2 - t^2) + 2dzt, \qquad 2xy = -e(z^2 - t^2) + 2hzt;$$

c. Changeons x en $-x$; nous aurons

$$x^2 - y^2 = b(z^2 - t^2) + 2dzt. \qquad 2xy = -e(z^2 - t^2) - 2hzt;$$

d. Changeons t en $-t$:

$$x^2 - y^2 = b(z^2 - t^2) - 2dzt, \qquad 2xy = e(z^2 - t^2) - 2hzt, \qquad \ldots;$$

pour tous ces systèmes, et pour tous ceux qu'on peut déduire semblablement de (1), $\pm k$ est donné par l'équation (27), donc dépend encore de $\pm \dfrac{b^2 + e^2 + d^2 + h^2}{ed - bh}$.

2° Nous retrouvons encore cette quantité si nous transformons comme il suit les équations (2). Posons

$$x - y = \xi, \qquad x + y = \eta,$$

d'où

$$x^2 - y^2 = \xi\eta, \qquad 2xy = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2),$$

ce qui permet d'écrire les équations (1)

$$\xi^2 - \eta^2 = 2e(z^2 - t^2) + 4hzt, \qquad 2\xi\eta = 2b(z^2 - t^2) + 4dzt;$$

soit

$$\xi^2 - \eta^2 = b''(z^2 - t^2) + 2d''zt, \qquad 2\xi\eta = e''(z^2 - t^2) + 2h''zt;$$

l'invariant relatif à ce dernier système est

$$\pm \frac{b''^2 + e''^2 + d''^2 + h''^2}{e''d'' - b''h''} = \pm \frac{e^2 + b^2 + h^2 + d^2}{bh - ed}.$$

3° Revenons maintenant aux équations (1). Résolvons-les, d'abord par rapport à $x^2 - y^2$ et $2xy$, ensuite par rapport à $z^2 - t^2$ et $2zt$.

On a

$$\left\{\begin{aligned} x^2 - y^2 &= \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}(z^2 - t^2) + 2\frac{b_1 d_2 - b_2 d_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} zt, \\ 2xy &= \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}(z^2 - t^2) + 2\frac{a_2 d_1 - a_1 d_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} zt. \end{aligned}\right.$$

d'où (2)

$$b = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad d = \frac{b_1 d_2 - b_2 d_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad e = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad h = \frac{a_2 d_1 - a_1 d_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Ensuite,

$$(33) \quad \left\{\begin{aligned} z^2 - t^2 &= \frac{a_2 d_1 - a_1 d_2}{c_1 d_2 - c_2 d_1}(x^2 - y^2) + 2\frac{b_2 d_1 - b_1 d_2}{c_1 d_2 - c_2 d_1} xy, \\ 2zt &= \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{c_1 d_2 - c_2 d_1}(x^2 - y^2) + 2\frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{c_1 d_2 - c_2 d_1} xy; \end{aligned}\right.$$

si nous écrivons

$$z^2 - t^2 = b'(x^2 - y^2) + 2d'xy, \qquad 2zt = e'(x^2 - y^2) + 2h'xy,$$

il est visible (2) que

$$b' = h, \qquad d' = -d, \qquad e' = -e, \qquad h' = b.$$

Il en résulte que l'équation (*cf.* avec 27) qui donne $\pm k$ pour le système (33) est identique avec celle qui donne k pour le système (2).

Étude du système (II).

17. Nous avons ici

$$(34) \quad \left\{\begin{aligned} \frac{x}{z} &= \frac{p(1-i)\operatorname{cn} u + q(1+i)\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{r\operatorname{sn}^2 u + s}, \\ \frac{y}{z} &= \frac{p(1+i)\operatorname{cn} u + q(1-i)\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{r\operatorname{sn}^2 u + s}, \qquad \frac{t}{z} = \frac{m\operatorname{sn}^2 u + n}{r\operatorname{sn}^2 u + s}. \end{aligned}\right.$$

Portons ces valeurs de $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{t}{z}$ dans les équations (1); il vient, en remplaçant $\operatorname{dn}^2 u$ par $k'^2 + k^2\operatorname{cn}^2 u$ et $\operatorname{sn}^2 u$ par $1 - \operatorname{cn}^2 u$,

$$\left\{\begin{aligned} &-\tfrac{1}{4}ip^2\operatorname{cn}^2 u + \tfrac{1}{4}iq^2(1-\operatorname{cn}^2 u)(k'^2 + k^2\operatorname{cn}^2 u) \\ &\quad - b[(r\operatorname{cn}^2 u + s)^2 - (m\operatorname{cn}^2 u + n)^2] - 2d(m\operatorname{cn}^2 u + n)(r\operatorname{cn}^2 u + s) = 0, \\ &\tfrac{1}{4}p^2\operatorname{cn}^2 u + \tfrac{1}{4}q^2(1-\operatorname{cn}^2 u)(k'^2 + k^2\operatorname{cn}^2 u) \\ &\quad - e[(r\operatorname{cn}^2 u + s)^2 - (m\operatorname{cn}^2 u + n)^2] - 2h(m\operatorname{cn}^2 u + s)(r\operatorname{cn}^2 u + s) = 0, \end{aligned}\right.$$

et, en exprimant que ces équations sont des identités,

$$(35)\quad \left\{\begin{array}{c} 4iq^2k'^2 - b(s^2-n^2) - 2dns = 0, \\ -4ip^2 + 4iq^2(k^2-k'^2) - 2b(rs-mn) - 2d(ms+nr) = 0, \\ -4iq^2k^2 - b(r^2-m^2) - 2dmr = 0; \end{array}\right.$$

$$(36)\quad \left\{\begin{array}{c} 4q^2k'^2 - e(s^2-n^2) - 2ens = 0, \\ 4p^2 + 4q^2(k^2-k'^2) - 2e(rs-mn) - 2h(ms+nr) = 0, \\ -4q^2k^2 - e(r^2-m^2) - 2hmr = 0. \end{array}\right.$$

Ces systèmes sont analogues aux systèmes (15, 16) et nous allons les traiter de façon semblable, en *nous préoccupant surtout de former l'équation qui donne* k, ou plutôt $\frac{k}{k'}$; nous verrons qu'*ici* k *est imaginaire*, contrairement à ce qui a lieu pour la représentation par les fonctions $\operatorname{sn} u$ et $\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$.

Éliminons q^2 entre (35^1, 35^3), puis entre (40^1, 40^3). Il vient

$$\left\{\begin{array}{l} -b[k^2(s^2-n^2) + k'^2(r^2-m^2)] - 2d(nsk^2 + mrk'^2) = 0, \\ -e[k^2(s^2-n^2) + k'^2(r^2-m^2)] - 2h(nsk^2 + mrk'^2) = 0, \end{array}\right.$$

ce qui suppose

$$k^2(s^2-n^2) + k'^2(r^2-m^2) = 0, \qquad nsk^2 + mrk'^2 = 0,$$

ou bien

$$(37)\qquad -\frac{k^2}{k'^2} = \frac{r^2-m^2}{s^2-n^2} = \frac{mr}{ns}.$$

1° Nous pouvons vérifier les équations (37) en écrivant

$$(38)\qquad \frac{n}{m} = \frac{s}{r} = \theta' = i\frac{k}{k};$$

les équations (35^1, 35^3) se réduisent à l'une d'entre elles, (35^3) par exemple, et, semblablement, il est inutile d'écrire (36^1), si l'on écrit (36^3), ce qui réduit (38) les systèmes (35, 36) à celui-ci :

$$(39)\quad \left\{\begin{array}{c} -4iq^2k^2 - b(r^2-m^2) - 2dmr = 0, \\ -2ip^2 + 2iq^2(k^2-k'^2) - b(r^2-m^2)i\frac{k'}{k} - 2dmri\frac{k'}{k} = 0, \\ -4q^2k^2 - e(r^2-m^2) - 2hmr = 0, \\ 2p^2 + 2q^2(k^2-k'^2) - e(r^2-m^2)i\frac{k'}{k} - 2hmri\frac{k'}{k} = 0; \end{array}\right.$$

$(39^1, 39^2)$ donnent

$$\left\{\begin{aligned} &-b(r^2-m^2)-2dmr=4iq^2k^2,\\ &[-b(r^2-m^2)-2dmr]\frac{k'}{k}=2p^2-2q^2(k^2-k'^2),\end{aligned}\right.$$

d'où

$$2iq^2kk'=p^2-q^2(k^2-k'^2). \tag{40}$$

D'autre part, $(39^3, 39^4)$ donnent

$$2q^2k^2=-i[p^2+q^2(k^2-k'^2)]\frac{k}{k'},$$

d'où

$$2iq^2kk'=p^2+q^2(k^2-k'^2),$$

relation incompatible avec (40).

2° Nous pouvons aussi vérifier les équations (37) en écrivant

$$m=r\theta,\qquad s=-n\theta, \tag{41}$$

d'où

$$\frac{k^2}{k'^2}=-\frac{m^2}{ns}=\frac{n^2}{r^2} \tag{42}$$

et

$$k^2=\frac{n^2}{r^2+n^2}. \tag{43}$$

Ici, les systèmes (35, 36), où il n'y a plus lieu d'écrire $(35^3, 36^3)$, si l'on tient compte de (41, 42 *ou* 43), se réduisent à $(35^1, 35^2, 36^1, 36^2)$; on a ainsi le système réduit

$$\left\{\begin{aligned} &4iq^2k'^2-b(s^2-n^2)-2dns=0,\\ &-2ip^2+2iq^2(k^2-k'^2)-b(rs-mn)-d(ms+nr)=0,\\ &4q^2k'^2-e(s^2-n^2)-2hns=0,\\ &2p^2+2q^2(k^2-k'^2)-e(rs-mn)-h(ms+nr)=0.\end{aligned}\right. \tag{44}$$

Nous avons (41), comme au n° **13**,

$$s^2-n^2=n^2(\theta^2-1),\qquad ns=-n^2\theta,\qquad rs-mn=-2nr\theta,$$
$$ms+nr=nr(1-\theta^2),$$

et les équations (44) deviennent

$$(45)\quad \left\{\begin{array}{c} 4iq^2k'^2 + bn^2(1-\theta^2) + 2dn^2\theta = 0, \\ -2ip^2 + 2iq^2(k^2-k'^2) + 2b\,nr\theta - dnr(1-\theta^2) = 0, \\ 4q^2k'^2 + en^2(1-\theta^2) + 2h\,n^2\theta = 0, \\ 2p^2 + 2q^2(k^2-k'^2) + 2e\,nr\theta - h\,nr(1-\theta^2) = 0. \end{array}\right.$$

Éliminons q^2 entre (45^1, 45^3); nous aurons

$$(46)\quad \begin{array}{c} b(1-\theta^2) + 2d\theta = ie(1-\theta^2) + 2ih\theta, \\ (-b+ie)\theta^2 + 2(d-ih)\theta + b - ie = 0, \end{array}$$

équation qui donne θ (*cf.* avec 25). Le système (45) peut, dès lors, être réduit à celui-ci, où $(45)^3$ est remplacé par (46) :

$$\left\{\begin{array}{c} -2ip^2 + 2iq^2(k^2-k'^2) + 2b\,nr\theta - d\,nr(1-\theta^2) = 0, \\ 4q^2k'^2 + en^2(1-\theta^2) + 2h\,n^2\theta = 0, \\ 2p^2 + 2q^2(k^2-k'^2) + 2e\,n^2\theta - h\,nr(1-\theta^2) = 0, \end{array}\right.$$

où nous allons remplacer $1-\theta^2$ par $2\dfrac{d-ih}{-b+ie}$ (46), ce qui donne

$$(47)\quad \left\{\begin{array}{c} -ip^2 + iq^2(k^2-k'^2) + nr\left(b - d\dfrac{d-ih}{-b+ie}\right)\theta = 0, \\ 2q^2k'^2 + \left(e\dfrac{d-ih}{-b+ie} + h\right)n^2\theta = 0, \\ p^2 + q^2(k^2-k'^2) + nr\left(e - h\dfrac{d-ih}{-b+ie}\right)\theta = 0. \end{array}\right.$$

Éliminons p^2 entre (47^1, 47^3); nous aurons

$$2iq^2(k^2-k'^2) + nr\left[b + ie + (d+ih)\frac{d-ih}{b-ie}\right]\theta = 0,$$

ou bien

$$(48)\quad 2iq^2(k^2-k'^2) + nr\frac{b^2+e^2+d^2+h^2}{b-ie}\theta = 0;$$

maintenant (47^2) peut s'écrire

$$2q^2k'^2 - \frac{ed-bh}{b-ie}n^2\theta = 0,$$

et, de l'élimination de q^2 entre cette équation et (48), il résultera

$$i\left(\frac{k^2}{k'^2} - 1\right)(ed-bh)\frac{n}{r} + b^2 + e^2 + d^2 + h^2 = 0;$$

remplaçons $\frac{n}{r}$ par $\frac{k'}{k}$ (42); nous obtiendrons l'équation qui détermine $\frac{k'}{k}$:

$$(49)\qquad (ed-bh)\frac{k^2}{k'^2}-i(b^2+e^2+d^2+h^2)\frac{k}{k'}-(ed-bh)=0;$$

ici, $\frac{k^2}{k'^2}$ *se trouve être égal à* $-k^2$ *de la représentation par* $\operatorname{sn} u$ et $\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$ (27).

La valeur de $\frac{r}{n}$ est donnée ici (42, 49) par

$$(ed-bh)\frac{r^2}{n^2}-i(b^2+e^2+d^2+h^2)\frac{r}{n}-(ed-bh)=0;$$

$\frac{r^2}{n^2}$ *a donc les mêmes valeurs dans la représentation par* $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$ (27) *et dans la représentation par* $\operatorname{cn} u$ *et* $\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u$.

On a vu qu'il en est de même de θ (46, 25).

Mais l'intérêt de la représentation qu'on vient d'étudier par $\operatorname{cn} u$ *et* $\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u$ *est médiocre, puisque* (49) $\frac{k}{k'}$, *donc aussi* k, *est imaginaire.*

Étude du système (III).

18. Nous avons ici

$$(50)\quad \begin{cases} -4ip^2\operatorname{dn}^2 u+4iq^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{cn}^2 u \\ \quad -b[(r\operatorname{dn}^2 u+s)^2-(m\operatorname{dn}^2 u+n)^2]-2d(m\operatorname{dn}^2 u+n)(r\operatorname{dn}^2 u+s)=0, \\ 4p^2\operatorname{dn}^2 u+4q^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{cn}^2 u \\ \quad -e[(r\operatorname{dn}^2 u+s)^2-(m\operatorname{dn}^2 u+n)^2]-2h(m\operatorname{dn}^2 u+n)(r\operatorname{dn}^2 u+s)=0. \end{cases}$$

Or

$$\operatorname{sn}^2 u=\frac{1-\operatorname{dn}^2 u}{k^2},\qquad \operatorname{cn}^2 u=\frac{-k'^2+\operatorname{dn}^2 u}{k^2},$$

ce qui permet d'écrire les formules (50)

$$\begin{cases} -4ip^2\operatorname{dn}^2 u+\frac{4iq^2}{k^2}(1-\operatorname{dn}^2 u)(-k'^2+\operatorname{dn}^2 u) \\ \quad -b[(r\operatorname{dn}^2 u+s)^2-(m\operatorname{dn}^2 u+n)^2]-2d(m\operatorname{dn}^2 u+n)(r\operatorname{dn}^2 u+s)=0, \\ 4p^2\operatorname{dn}^2 u+\frac{4q^2}{k^2}(1-\operatorname{dn}^2 u)(-k'^2+\operatorname{dn}^2 u) \\ \quad -e[(r\operatorname{dn}^2 u+s)^2-(m\operatorname{dn}^2 u+n)^2]-2h(m\operatorname{dn}^2 u+n)(r\operatorname{dn}^2 u+s)=0. \end{cases}$$

Exprimons que ces équations sont des identités; nous aurons

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} &-4iq^2\frac{k'^2}{k^4} - b(s^2-n^2) - 2dns = 0,\\ &-4ip^2+4iq^2\frac{1+k'^2}{k^4} - 2b(rs-mn) - 2d(ms+nr) = 0,\\ &-\frac{4iq^2}{k^4} - b(r^2-m^2) - 2dmr = 0;\end{aligned}\right.$$

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} &-4q^2\frac{k'^2}{k^4} - e(s^2-n^2) - 2hns = 0,\\ &4p^2+4q^2\frac{1+k'^2}{k^4} - 2e(rs-mn) - 2h(ms+nr) = 0.\\ &-\frac{4q^2}{k^4} - e(r^2-m^2) - 2hmr = 0.\end{aligned}\right.$$

Éliminons q^2 entre (51^1, 51^3), puis entre (52^1, 52^3) :

$$b[(r^2-m^2)k'^2-(s^2-n^2)] + 2d(mrk'^2-ns) = 0,$$
$$e[(r^2-m^2)k'^2-(s^2-n^2)] + 2h(mrk'^2-ns) = 0,$$

équations qui supposent

$$(r^2-m^2)k'^2-(s^2-n^2) = 0, \qquad mrk'^2-ns = 0,$$

ou

$$(53)\qquad k'^2 = \frac{s^2-n^2}{r^2-m^2} = \frac{ns}{mr}.$$

1° Ces équations sont vérifiées si l'on pose

$$n = m\theta', \qquad s = r\theta', \qquad k'^2 = \theta'^2.$$

mais il est facile de voir, comme pour les systèmes (I, II), que cela conduit à deux relations contradictoires, qui seraient

$$q(1+k') = pk^2, \qquad q(1+k') = ipk^2.$$

2° Nous pouvons aussi vérifier les relations (53) en prenant, comme précédemment,

$$(54)\qquad m = r\theta, \qquad s = -n\theta;$$

ici (53, 54),

$$(55)\qquad k'^2 = -\frac{n^2}{r^2},$$

et les équations (51, 52), où il n'y a plus lieu d'écrire (51^3, 52^3), se réduisent (54) à

$$(56)\quad \left\{\begin{aligned} &-4iq^2\frac{k'^2}{k^4} + bn^2(1-\theta^2) + 2dn^2\theta = 0,\\ &-2ip^2 + 2iq^2\frac{1+k'^2}{k^4} + 2bnr\theta - dnr(1-\theta^2) = 0,\\ &-4q^2\frac{k'^2}{k^4} + en^2(1-\theta^2) + 2hn^2\theta = 0,\\ &2p^2 + 2q^2\frac{1+k'^2}{k^4} + 2enr\theta - hnr(1-\theta^2) = 0. \end{aligned}\right.$$

Éliminons q^2 entre (56^1, 56^3); nous aurons

$$(57)\qquad (-b+ie)\theta^2 + 2(d-ih)\theta + b - ie = 0,$$

équation qui donne θ : θ *a la même valeur que pour les systèmes* (I, II). Le système (56) se réduit à

$$\left\{\begin{aligned} &-2ip^2 + 2iq^2\frac{1+k'^2}{k^4} + 2bnr\theta - dnr(1-\theta^2) = 0,\\ &-4q^2\frac{k'^2}{k^4} + en^2(1-\theta^2) + 2hn^2\theta = 0,\\ &2p^2 + 2q^2\frac{1+k'^2}{k^4} + 2enr\theta - hnr(1-\theta^2) = 0. \end{aligned}\right.$$

où nous allons remplacer $1-\theta^2$ par $2\dfrac{d-ih}{-b+ie}\theta$ (57), ce qui donne

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} &-ip^2 + iq^2\frac{1+k'^2}{k^4} + nr\left(b - d\frac{d-ih}{-b+ie}\right)\theta = 0,\\ &-2q^2\frac{k'^2}{k^4} + \left(e\frac{d-ih}{-b+ie} + h\right)n^2\theta = 0,\\ &p^2 + q^2\frac{1+k'^2}{k^4} + nr\left(e - h\frac{d-ih}{-b+ie}\right)\theta = 0. \end{aligned}\right.$$

Éliminons p^2 entre (58^1, 58^3); nous aurons

$$2iq^2\frac{1+k'^2}{k^4} + nr\left[b+ie+(d+ih)\frac{d-ih}{b-ie}\right]\theta = 0,$$

ou bien

$$(59)\qquad 2iq^2\frac{1+k'^2}{k^4} + nr\frac{b^2+e^2+d^2+h^2}{b-ie}\theta = 0;$$

(58^2) peut s'écrire maintenant

$$(60)\qquad -2q^2\frac{k'^2}{k^4}-\frac{ed-bh}{b-ie}n^2\theta=0$$

et de l'élimination de q^2 entre cette équation et (59), il résulte, en remplaçant $i\frac{n}{r}$ par k' (55),

$$(61)\qquad (ed-bh)k'^2-(b^2+e^2+d^2+h^2)k'+ed-bh=0,$$

équation qui donne pour k' deux valeurs réelles, dont une comprise entre 0 *et* 1.

Nous avons ensuite (54, 55, 60)

$$(62)\qquad \frac{m}{n}=\frac{i\theta}{k'},\qquad \frac{r}{n}=\frac{i}{k'},\qquad \frac{s}{n}=-\theta,\qquad \frac{q^2}{n^2}=-\frac{1}{2}\frac{k^4}{k'^2}\frac{ed-bh}{b-ie}\theta,$$

et nous obtiendrons $\frac{p^2}{n^2}$ en éliminant q^2 entre (58^1, 58^3), ce qui donne

$$\frac{p^2}{n^2}=-\frac{1}{2}\frac{(b-ie)^2+(d-ih)^2}{b-ie}\theta\frac{ir}{n};$$

remplaçons $\frac{ir}{n}$ par $-\frac{1}{k}$, (55), il vient

$$(63)\qquad \frac{p^2}{n^2}=\frac{1}{2}\frac{(b-ie)^2+(d-ih)^2}{b-ie}\frac{\theta}{k'}.$$

Résumé concernant les quartiques φ_+^3.

19. Il résulte de ce qui a été dit (**14** à **18**) que, *en imposant à k la condition d'être réel et compris entre* -1 et $+1$, *les quartiques φ_+^3*, qui ont pour équation

$$\begin{cases} x^2-y^2=b(z^2-t^2)+2dzt,\\ 2xy\quad=e(z^2-t^2)+2hzt.\end{cases}$$

peuvent être représentées : 1° par les équations

$$\frac{x}{p(1-i)\operatorname{sn}u+q(1+i)\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}=\frac{y}{p(1+i)\operatorname{sn}u+q(1-i)\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}=\frac{z}{r\operatorname{sn}^2u+s}=\frac{t}{m\operatorname{sn}^2u+n},$$

où θ et k étant déterminés par les équations

$$\begin{cases} (-b+ie)\theta^2+2(d-ih)\theta \qquad +b-ie \qquad =0, \\ (ed-bh)k^2-(b^2+e^2+d^2+h^2)k+(ed-bh)=0, \end{cases}$$

$\frac{p^2}{n^2}, \frac{q^2}{n^2}, \frac{r^2}{n^2}, \frac{m}{n}, \frac{s}{n}$ *le sont à leur tour comme il suit :*

$$\begin{cases} \frac{p^2}{n^2}=-\frac{1}{2}\frac{(b-ie)^2+(d-ih)^2}{b-ie}\theta k, \qquad \frac{q^2}{n^2}=\frac{1}{2}\frac{ed-bh}{e-ie}\theta, \\ \frac{r^2}{n^2}=-k^2, \qquad \frac{m}{n}=i\theta k, \qquad \frac{s}{n}=-\theta \end{cases}$$

et 2° peuvent l'être aussi par les équations

$$\frac{x}{p(1-i)\operatorname{dn}u+q(1+i)\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u}$$

$$\frac{y}{p(1+i)\operatorname{dn}u+q(1-i)\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u}=\frac{z}{r\operatorname{dn}^2u+s}=\frac{t}{m\operatorname{dn}^2u+n},$$

où θ et k' étant déterminés par les équations

$$\begin{cases} (-b+ie)\theta^2+2(d-ih)\theta \quad +b-ie \qquad =0, \\ (ed-bh)k^2-(b^2+e^2+d^2+h^2)k'(ed-bh)=0; \end{cases}$$

$\frac{p^2}{n^2}, \frac{q^2}{n^2}, \frac{r^2}{n^2}, \frac{m}{n}, \frac{s}{n}$ *le sont à leur tour par :*

$$\begin{cases} \frac{p^2}{n^2}=\frac{1}{2}\frac{(b-ie)^2+(d-ih)^2}{b-ie}\frac{\theta}{k'}, \qquad \frac{q^2}{n^2}=-\frac{1}{2}\frac{k^4}{k'^2}\frac{ed-bh}{b-ie}\theta, \\ \frac{r^2}{n^2}=-\frac{1}{k'^2}, \qquad \frac{m}{n}=\frac{i\theta}{k'}, \qquad \frac{s}{n}=-\theta, \end{cases}$$

et que les quartiques φ_1^3 n'admettent pas d'autre représentation paramétrique, en fonction de $\operatorname{sn}u$, $\operatorname{cn}u$, $\operatorname{dn}u$.

Il existe une troisième représentation paramétrique, et une seule (**17**), si l'on n'impose plus à k la condition d'être réel.

THÉORÈME. — *Il n'est pas possible de faire disparaître les imaginaires par un changement du tetraèdre de référence.*

Prenons, par exemple, la représentation par $\operatorname{dn}u$ et $\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u$ qu'on vient d'écrire dans cette même page ; chacun des rapports

écrits est égal à celui-ci

$$\frac{z + \varkappa t}{\left(\frac{r}{n} + \varkappa \frac{m}{n}\right) \mathrm{dn}^2 u + \frac{s}{n} + \varkappa},$$

qu'on peut écrire, si $\theta = \theta_1 + \theta_2 i$, θ_1 et θ_2 réels,

$$\frac{z + \varkappa t}{[\pm i + \varkappa i(\theta_1 + i\theta_2)] \frac{\mathrm{dn}^2 u}{k'} + \varkappa - \theta_1 - \theta_2 i}.$$

Nous n'avons qu'une seule solution possible : $\varkappa = \theta_2 i$ et ce rapport devient

$$\frac{z + \varkappa t}{[-\theta_1 \theta_2 - i(\pm 1 - \theta_2^2)] \frac{\mathrm{dn}^2 u}{k'} - \theta_1},$$

où les imaginaires subsistent.

Chapitre IV. — Cas où trois des cônes du faisceau de quadriques deviennent des cylindres.

20. Nous ne pouvons plus employer les coordonnées tétraédriques quand trois des cônes deviennent des cylindres puisque, dans tous les cas que nous avons étudiés, les sommets du tétraèdre de référence sont liés aux sommets des cônes faisant partie du faisceau de quadriques.

Il est donc nécessaire de reprendre complètement la question : *et l'on verra que les résultats sont essentiellement différents de ceux obtenus jusqu'ici.*

Nous allons faire choix d'un système de coordonnées cartésiennes ; nous prendrons Ox, Oy, Oz respectivement parallèles aux génératrices des trois cylindres du faisceau et nous placerons l'origine en un point, quelconque, de la courbe.

On sait [1] que les cylindres (C_1), (C_2), (C_3) ont des équations de

---

[1] R. de Montessus de Ballore, *Introduction à la théorie des courbes gauches algébriques* (*Cours libre professé à la Faculté des Sciences de Paris*), p. 49. Paris, Croville-Morant, 1918.

la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} (C_1) & cy^2 - \gamma z^2 + 2ey - 2\varepsilon z = 0, \\ (C_2) & ax^2 + \gamma z^2 + 2dx + 2\varepsilon z = 0, \\ (C_3) & ax^2 + cy^2 + 2dx + 2ey = 0. \end{cases}$$

L'un au moins de ces cylindres est hyperbolique, puisque

$$(2)\qquad (-c\gamma)(a\gamma)(ac) = -a^2c^2\gamma^2 < 0,$$

ce qui nécessite que l'un au moins des trois facteurs du premier membre soit négatif.

Dans ce qui suit, jusqu'au n° 24, nous supposerons que le cylindre (C_2) *est hyperbolique*, c'est-à-dire que

$$a\gamma < 0.$$

21. 1° Les équations $(1^3, 1^2)$

$$(3)\qquad \begin{cases} ax^2 + cy^2 + 2dx + 2ey = 0, \\ ax^2 + \gamma z^2 + 2dx + 2\varepsilon z = 0, \end{cases}$$

suffisent à définir la quartique.

Posons

$$(4)\qquad y = \lambda x;$$

l'équation (3^1) devient

$$ax + c\lambda^2 x + 2d + 2e\lambda = 0,$$

d'où

$$(5^1, 5^2)\qquad x = -2\frac{d + e\lambda}{a + c\lambda^2}, \qquad y = -2\frac{d + e\lambda}{a + c\lambda^2}\lambda;$$

portons cette valeur de x dans l'équation (3^2), préalablement écrite

$$\gamma z + \varepsilon = \sqrt{\varepsilon^2 - \gamma(ax^2 + dx)};$$

il viendra

$$\gamma z + \varepsilon = \sqrt{\varepsilon^2 - 4\gamma a\frac{(d + e\lambda)^2}{(a + c\lambda^2)^2} - 4d\gamma\frac{d + e\lambda}{a + c\lambda^2}},$$

$$(5^3)\qquad \gamma z + \varepsilon = \frac{1}{a + c\lambda^2}\sqrt{\varepsilon^2(a + c\lambda^2)^2 - 4d\gamma(d + e\lambda)(a + c\lambda^2) - 4a\gamma(d + e\lambda^2)^2};$$

l'expression qui figure sous le radical peut s'écrire

$$\left[\varepsilon(a+c\lambda^2)-\frac{2d\gamma}{\varepsilon}(d+\varepsilon\lambda)\right]^2-\left(\frac{4d^2\gamma^2}{\varepsilon^2}+4a\gamma\right)(d+\varepsilon\lambda^2)^2;$$

elle peut donc être mise sous forme d'une différence de carré si

$$\gamma(d^2\gamma+a\varepsilon^2)>0. \tag{6}$$

2° Les équations (1^4, 1^3)

$$\left\{\begin{array}{l} cy^2-\gamma z^2+2ey-2\varepsilon z=0,\\ ax^2+\gamma z^2+2dx+2\varepsilon z=0\end{array}\right. \tag{7}$$

suffisent, tout comme les équations (3), à définir la quartique. Posons

$$y=\lambda' z; \tag{8}$$

il vient (7^1)

$$c\lambda'^2 z+\gamma z+2e\lambda'-2\varepsilon=0,$$

d'où nous tirons

$$z=-2\frac{\varepsilon-e\lambda'}{\gamma-c\lambda'^2},\qquad y=-2\frac{\varepsilon-e\lambda'}{\gamma-c\lambda'^2}\lambda';$$

portons dans (7^2), préalablement écrite,

$$ax+d=\sqrt{d^2-a(\gamma z^2+2\varepsilon z)};$$

il vient

$$ax+d=\sqrt{a^2-4a\gamma\left(\frac{\varepsilon-e\lambda'}{\gamma-c\lambda'^2}\right)^2-4a\varepsilon\frac{\varepsilon-e\lambda'}{\gamma-c\lambda'^2}},$$

$$ax+d=\frac{1}{\gamma-c\lambda'^2}\sqrt{d^2(\gamma-c\lambda'^2)-4a\varepsilon(\varepsilon-e\lambda')(\gamma-c\lambda'^2)-4a\gamma(\varepsilon-c\lambda'^2)^2};$$

ici, l'expression sous le radical est une différence de carrés si

$$a(d^2\gamma+a\varepsilon^2)>0. \tag{9}$$

L'inégalité (2) montre que *l'une, et une seule, des deux relations* (6) *ou* (9) *est toujours vérifiée.*

22. Admettons, *pour fixer les idées*, que l'inégalité (6) soit vérifiée. Dans ce cas, l'expression qui figure sous le radical de l'équa-

tion (5^3) est une différence de carrés et nous pouvons écrire

$$(10)\qquad \gamma z+\varepsilon=\frac{1}{a+c\lambda^2}\sqrt{(P\lambda^2+Q\lambda+R)(P'\lambda^2+Q'\lambda+R')},$$

x et y étant déterminés en fonction de λ par les équations (5^1) (5^2)

$$(11)\qquad x=-2\frac{d+e\lambda}{a+c\lambda^2},\qquad y=-2\frac{d+e\lambda}{a+c\lambda^2}\lambda.$$

Posons

$$(12)\qquad Y^2=P\lambda^2+Q\lambda+R,$$

et soit λ_0 une racine du second membre de cette équation, de telle sorte que

$$0=P\lambda_0^2+Q\lambda_0+R;$$

nous aurons, en soustrayant l'une de l'autre les deux équations qu'on vient d'écrire

$$Y.Y=P(\lambda+\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)+Q(\lambda-\lambda_0);$$

posons encore

$$Y=\rho(\lambda-\lambda_0);$$

il vient, en portant dans l'équation qui précède,

$$Y\rho=P(\lambda+\lambda_0)+Q,$$

et nous avons, pour déterminer Y et λ en fonction de ρ, le système

$$\begin{cases} Y-\rho\lambda=-\lambda_0\rho,\\ \rho Y-P\lambda=P\lambda_0+Q,\end{cases}$$

qui donne pour λ et Y des expressions de la forme

$$(13)\qquad \lambda=\frac{S_1+S_2\rho^2}{P-\rho^2},\qquad Y=\frac{S_3\rho}{P-\rho^2}.$$

Portons ces valeurs de λ et Y dans (10), que la relation (12) permet d'écrire

$$\gamma z+\varepsilon=\frac{1}{a+c\lambda^2}Y\sqrt{P'\lambda^2+Q'\lambda+R'};$$

il vient

$$\gamma z+\varepsilon=\frac{1}{a+c\left(\frac{S_1+S_2\rho^2}{P-\rho^2}\right)^2}\,\frac{S_3\rho}{P-\rho^2}\sqrt{P'\left(\frac{S_1+S_2\rho^2}{P-\rho^2}\right)^2+Q'\frac{S_1+S_2\rho^2}{P-\rho^2}+R'},$$

ou

$$(14)\quad \gamma z + \varepsilon = \frac{S_3\rho}{a(P-\rho^2)^2 + c(S_1+S_2\rho^2)^2} \cdot \sqrt{P'(S_1+S_2\rho^2)^2 + Q'(S_1+S_2\rho^2)(P-\rho^2) + R'(P-\rho^2)^2}.$$

25. Exprimer ρ et la racine carrée du polynome qui figure sous le radical par les fonctions elliptiques $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ est un problème analogue à celui qui a été étudié au n° **6**.

On y parviendra en écrivant, selon les cas,

$$\rho = h \operatorname{sn} u, \qquad \rho = h_1 \operatorname{cn} u, \qquad \rho = h_2 \operatorname{dn} u,$$

et en choisissant h ou h_1, ou h_2 convenablement.

La suite de cette étude (n^{os} **24-57**) *indiquera les modalités du calcul.*

Soit d'*abord*

$$\rho = h \operatorname{sn} u;$$

$\gamma z + \varepsilon$ et λ seront de la forme (14), (13)

$$(15)\quad \gamma z + \varepsilon = \frac{S_3 h' \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{a(P - h^2 \operatorname{sn}^2 u) + c(S_1 + S_2 h^2 \operatorname{sn}^2 u)}, \qquad \lambda = \frac{S_1 + S_2 h^2 \operatorname{sn}^2 u}{P - h^2 \operatorname{sn}^2 u};$$

en second lieu, si

$$\rho = h_1 \operatorname{cn} u,$$

$\gamma z + \varepsilon$ et λ sont de la forme

$$\gamma z + \varepsilon = \frac{S_3 h'_1 \operatorname{cn} u \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{a(P - h^2 \operatorname{sn}^2 u) + c(S_1 + S_2 h^2 \operatorname{cn}^2 u)}, \qquad \lambda = \frac{S_1 + S_2 h_1^2 \operatorname{cn}^2 u}{P - h^2 \operatorname{cn}^2 u};$$

la relation

$$\operatorname{cn}^2 u = 1 - \operatorname{sn}^2 u$$

rend ces expressions identiques aux expressions (15).

De même si

$$\rho = h_2 \operatorname{dn} u.$$

Les expressions (15) *de* $\gamma z + \varepsilon$ *et de* λ *sont donc les seules qu'il y ait lieu de considérer. Il en résulte que* x, y (11) *et* $\gamma z + \varepsilon$ *sont de la*

forme

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{\pi_1 \operatorname{sn}^2 u + \pi_2 \operatorname{sn}^2 u + \pi_3}{\omega_1 \operatorname{sn}^2 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3}, \quad y = \frac{\chi_1 \operatorname{sn}^2 u + \chi_2 \operatorname{sn}^2 u + \chi_3}{\omega_1 \operatorname{sn}^2 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3}, \\ \gamma z + \varepsilon &= \frac{\tau \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\omega_1 \operatorname{sn}^2 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3}. \end{aligned}\right.$$

Je vais établir, dans la suite de ce Chapitre, la correspondance entre les quantités π, χ, ω, le module k et a, c, d, e, γ, ε. Elle ne nécessite pas l'introduction d'imaginaires.

Réduction du système (16) *et conditions de réalité de* $\frac{\pi_1}{\omega_1}, \frac{\pi_3}{\omega_3}, \frac{\chi_1}{\omega_1}, \frac{\chi_3}{\omega_3}$.

24. Les valeurs (16) de x, y, z comportent dix paramètres : le module k et le rapport de neuf des quantités τ,

$$\pi_1, \quad \pi_2, \quad \pi_3, \quad \chi_1, \quad \chi_2, \quad \chi_3, \quad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3$$

à la dixième, qui sera ω_2. Les quantités à déterminer sont ainsi

$$k, \quad \frac{\tau}{\omega_2}, \quad \frac{\pi_1}{\omega_2}, \quad \frac{\pi_2}{\omega_2}, \quad \frac{\pi_3}{\omega_2}, \quad \frac{\chi_1}{\omega_2}, \quad \frac{\chi_2}{\omega_2}, \quad \frac{\chi_3}{\omega_2}, \quad \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad \frac{\omega_3}{\omega_2}.$$

Nous calculerons d'abord

$$\frac{\pi_1}{\omega_1}, \quad \frac{\pi_3}{\omega_3}, \quad \frac{\chi_1}{\omega_1}, \quad \frac{\chi_3}{\omega_3}.$$

Après avoir déterminé $\frac{\omega_1}{\omega_2}, \frac{\omega_3}{\omega_2}$, il nous suffira d'écrire

$$\frac{\pi_1}{\omega_2} = \frac{\pi_1}{\omega_1} \times \frac{\omega_1}{\omega_2}, \qquad \frac{\pi_3}{\omega_2} = \frac{\pi_3}{\omega_3} \times \frac{\omega_3}{\omega_2}, \qquad \frac{\chi_1}{\omega_2} = \frac{\chi_1}{\omega_1} \times \frac{\omega_1}{\omega_2}, \qquad \frac{\chi_3}{\omega_2} = \frac{\chi_3}{\omega_3} \times \frac{\omega_3}{\omega_1}$$

pour connaître les expressions de

$$\frac{\pi_1}{\omega_2}, \quad \frac{\pi_3}{\omega_3}, \quad \frac{\chi_1}{\omega_1}, \quad \frac{\chi_3}{\omega_3}.$$

Nous pouvons remarquer que les inconnues k, $\frac{\tau}{\omega_2}$, ..., $\frac{\omega_3}{\omega_2}$ sont au nombre de 10, tandis que les équations (1) ou (3) ne comportent que six paramètres.

Remplaçons x, y, $\gamma z + \varepsilon$ par leurs valeurs (16) dans les équations (3), après avoir écrit l'équation (3^2) comme suit

$$\frac{1}{\gamma}(\gamma z + \varepsilon)^2 + ax^2 + 2dx - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = 0.$$

Il vient, en remplaçant $\operatorname{cn}^2 u$, $\operatorname{dn}^2 u$ par $1 - \operatorname{sn}^2 u$, $1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u$,

$$\left\{\begin{aligned}
&a(\pi_1 \operatorname{sn}^2 u + \pi_2 \operatorname{sn}^2 u + \pi_3)^2 + c(\chi_1 \operatorname{sn}^2 u + \chi_2 \operatorname{sn}^2 u + \chi_3)^2 \\
&\quad + 2d(\pi_1 \operatorname{sn}^2 u + \pi_2 \operatorname{sn}^2 u + \pi_3)(\omega_1 \operatorname{sn}^2 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3) \\
&\quad + 2e(\chi_1 \operatorname{sn}^2 u + \chi_2 \operatorname{sn}^2 u + \chi_3)(\omega_1 \operatorname{sn}^2 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3) = 0, \\
&\frac{1}{\gamma}\tau^2 \operatorname{sn}^2 u(1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u) + a(\pi_1 \operatorname{sn}^2 u + \pi_2 \operatorname{sn}^2 u + \pi_3)^2 \\
&\quad + 2d(\pi_1 \operatorname{sn}^2 u + \pi_2 \operatorname{sn}^2 u + \pi_3)(\omega_1 \operatorname{sn}^2 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3) \\
&\quad - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}(\omega_1 \operatorname{sn}^2 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3)^2 = 0.
\end{aligned}\right.$$

Exprimons que ces équations sont identiquement vérifiées, c'est-à-dire que les coefficients des diverses puissances de $\operatorname{sn} u$ sont nulles; nous obtenons les deux systèmes

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
&a\pi_1^2 + c\chi_1^2 + 2d\pi_1\omega_1 + 2e\chi_1\omega_1 = 0, \\
&a\pi_1\pi_2 + c\chi_1\chi_2 + d(\pi_1\omega_2 + \pi_2\omega_1) + e(\chi_1\omega_1 + \chi_2\omega_1) = 0, \\
&a(\pi_2^2 + 2\pi_1\pi_3) + c(\chi_2^2 + 2\chi_1\chi_3) \\
&\quad + 2d(\pi_1\omega_3 + \pi_3\omega_1 + \pi_2\omega_2) + 2e(\chi_1\omega_3 + \chi_3\omega_1 + \chi_2\omega_2) = 0, \\
&a\pi_2\pi_3 + c\chi_2\chi_3 + d(\pi_2\omega_3 + \pi_3\omega_2) + e(\chi_2\omega_3 + \chi_3\omega_2) = 0, \\
&a\pi_3^2 + c\chi_3^2 + 2d\pi_3\omega_3 + 2e\chi_3\omega_3 = 0;
\end{aligned}\right.$$

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}
&a\pi_1^2 + 2d\pi_1\omega_1 - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\omega_1^2 = 0, \\
&\frac{1}{2\gamma}\tau^2 k^2 + a\pi_1\pi_2 + d(\pi_1\omega_2 + \pi_2\omega_1) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\omega_1\omega_2 = 0, \\
&-\frac{1}{\gamma}\tau^2(1 + k^2) + a(\pi_2^2 + 2\pi_1\pi_3) + 2d(\pi_1\omega_3 + \pi_3\omega_1 + \pi_2\omega_2) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}(\omega_2^2 + 2\omega_1\omega_3) = 0, \\
&\frac{1}{2\gamma}\tau^2 + a\pi_2\pi_3 + d(\pi_2\omega_3 + \pi_3\omega_2) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\omega_2\omega_3 = 0, \\
&a\pi_3^2 + 2d\pi_3\omega_3 - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\omega_3^2 = 0.
\end{aligned}\right.$$

Posons

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}
&\pi_1 = l_1\omega_1, \qquad \pi_2 = l_2\omega_2, \qquad \pi_3 = l_3\omega_3, \\
&\chi_1 = m_1\omega_1, \qquad \chi_2 = m_2\omega_2, \qquad \chi_3 = m_3\omega_3;
\end{aligned}\right.$$

les équations (17), (18) deviennent

$$(20)\quad \begin{cases} al_1^2 + cm_1^2 + 2dl_1 + 2em_1 = 0, \\ al_1l_2 + cm_1m_2 + d(l_1 + l_2) + e(m_1 + m_2) = 0, \\ a(l_2^2\omega_2^2 + 2l_1l_3\omega_1\omega_3) + c(m_2^2\omega_2^2 + 2m_1m_3\omega_1\omega_3) \\ \quad + 2d(l_1\omega_1\omega_3 + l_3\omega_1\omega_3 + l_2\omega_2^2) + 2e(m_1\omega_1\omega_3 + m_3\omega_1\omega_3 + m_2\omega_2^2) = 0, \\ al_2l_3 + cm_2m_3 + d(l_2 + l_3) + e(m_2 + m_3) = 0, \\ al_3^2 + cm_3^2 + 2dl_3 + 2em_3 = 0; \end{cases}$$

$$(21)\quad \begin{cases} al_1^2 + 2dl_1 - \dfrac{\varepsilon^2}{\gamma} = 0, \\ \dfrac{1}{2\gamma}\tau^2k^2 + al_1l_2\omega_1\omega_2 + d(l_1 + l_2)\omega_1\omega_2 - \dfrac{\varepsilon^2}{\gamma}\omega_1\omega_2 = 0, \\ -\dfrac{\tau^2}{\gamma}(1 + k^2) + a(l_2^2\omega_2^2 + 2l_1l_3\omega_1\omega_3) \\ \quad + 2d(l_1\omega_1\omega_3 + l_3\omega_1\omega_3 + l_2\omega_2^2) - \dfrac{\varepsilon^2}{\gamma}(\omega_2^2 + 2\omega_1\omega_3) = 0, \\ \dfrac{1}{2\gamma}\tau^2 + al_2l_3\omega_2\omega_3 + d(l_2 + l_3)\omega_2\omega_3 - \dfrac{\varepsilon^2}{\gamma}\omega_2\omega_3 = 0, \\ al_3^2 + 2dl_3 - \dfrac{\varepsilon^2}{\gamma} = 0. \end{cases}$$

25. Les équations (21^1), (21^5) déterminent l_1, l_3, à cela près que l_1, l_3 sont simplement assujettis à être racines de

$$(22^1)\qquad al^2 + 2dl - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = 0;$$

la discussion de ce point prendra plus tard une large place de cette étude.

De (20^1) retranchons (21^1), et de (20^5) retranchons (21^5); il en résulte que m_1, m_2 doivent vérifier l'équation

$$(22^2)\qquad cm^2 + 2em + \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = 0;$$

à ce propos encore une discussion importante aura lieu.

Les conditions de réalité de l_1 et l_2, m_1 et m_2 sont (22^1), (22^2)

$$(23)\qquad d^2 + a\frac{\varepsilon^2}{\gamma} > 0, \qquad e^2 - c\frac{\varepsilon^2}{\gamma} > 0.$$

Reportons-nous aux équations (1) qui définissent la quartique. Écrivons-les

$$(24)\qquad \begin{cases} -\gamma(cy+e)^2+c(\gamma z+\varepsilon)^2+\Delta_1=0,\\ \gamma(ax+d)^2+a(\gamma z+\varepsilon)^2+\Delta_2=0,\\ c(ax+d)^2+a(cy+e)^2+\Delta_3=0,\end{cases}$$

où l'on a posé

$$(25)\qquad \Delta_1=\gamma e^2-c\varepsilon^2,\qquad \Delta_2=-a\varepsilon^2-\gamma d^2,\qquad \Delta_3=-cd^2-ae^2;$$

on sait que Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont les discriminants des coniques (24). *Ils vont jouer un rôle fondamental dans ce Chapitre.*

Dès maintenant, ils s'introduisent dans les conditions de réalité (23) qui peuvent être écrites, en les multipliant par γ^2,

$$\gamma(\gamma\delta^2+a\varepsilon^2)>0,\qquad \gamma(\gamma e^2-c\varepsilon^2)>0$$

ou

$$(26)\qquad -\gamma\Delta_2>0,\qquad \gamma\Delta_1>0.$$

Montrons que ces conditions de réalité (23) *sont vérifiées si*

$$(27)\qquad \begin{cases} a>0 \quad \text{avec} \quad c<0 \quad \text{et} \quad \gamma>0,\\ \textit{ou bien}\\ a<0 \quad \text{avec} \quad c>0 \quad \text{et} \quad \gamma<0;\end{cases}$$

en effet, les équations (24^1, 24^2) peuvent être écrites

$$\begin{cases} -\gamma^2(cy+e)^2+c\gamma(\gamma z+\varepsilon)^2+\gamma\Delta_1=0,\\ \gamma^2(ax+d)^2+a\gamma(\gamma z+\varepsilon)^2+\gamma\Delta_2=0;\end{cases}$$

la *réalité* des cylindres représentés par ces équations, qui va de pair avec la réalité de la quartique, exige :

1° *Si*

$$a>0,\qquad c<0,\qquad \gamma>0,\qquad \text{d'où}\qquad c\gamma<0,\qquad a\gamma>0,$$

que

$$\gamma\Delta_1>0,\qquad \gamma\Delta_2<0;$$

2° *Si*

$$a<0,\qquad c>0,\qquad \gamma<0,\qquad \text{d'où encore}\qquad c\gamma<0,\qquad a\gamma>0,$$

que, à nouveau,

$$\gamma\Delta_1>0,\qquad \gamma\Delta_2<0;$$

ce sont les conditions (26).

26. *Mais, a, c, γ peuvent avoir d'autres signes que ceux indiqués* (27) *et il nous est nécessaire, à ce propos, d'envisager non seulement les formules* (16), *mais aussi les formules obtenues par permutation qui vont suivre.*

1° Posons, au lieu de (16),

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{\pi_1 \operatorname{sn}^2 u + \pi_2 \operatorname{sn}^2 u + \pi_3}{\omega_1 \operatorname{sn}^2 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3}, \qquad cy + e = \frac{z \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\omega_1 \operatorname{sn}^2 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3}, \\ z &= \frac{\chi_1 \operatorname{sn}^2 u + \chi_2 \operatorname{sn}^2 u + \chi_3}{\omega_1 \operatorname{sn}^2 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3} \end{aligned}\right.$$

et portons ces valeurs de x, $cy + e$, z dans les équations (1^2, 1^3), qui sont

$$\left\{\begin{aligned} & ax^2 + \gamma z^2 + 2dx + 2\varepsilon z = 0, \\ & \frac{1}{c}(cy + e)^2 + ax^2 + 2dx - \frac{e^2}{c} = 0; \end{aligned}\right.$$

il vient

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} & a(\pi_1 \operatorname{sn}^2 u + \pi_2 \operatorname{sn}^2 u + \pi_3)^2 + \gamma(\chi_1 \operatorname{sn}^2 u + \chi_2 \operatorname{sn}^2 u + \chi_3)^2 \\ & + 2d(\pi_1 \operatorname{sn}^2 u + \pi_2 \operatorname{sn}^2 u + \pi_3) \times (\omega_1 \operatorname{sn}^2 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3) \\ & + 2\varepsilon(\chi_1 \operatorname{sn}^2 u + \chi_2 \operatorname{sn}^2 u + \chi_3) \times (\omega_1 \operatorname{sn}^2 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3) = 0. \\ & \frac{1}{c} z^2 \operatorname{sn}^2 u (1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u) \\ & \quad + a(\pi_1 \operatorname{sn}^2 u + \pi_2 \operatorname{sn}^2 u + \pi_3)^2 + 2d(\pi_1 \operatorname{sn}^2 u + \pi_2 \operatorname{sn}^2 u + \pi_3) \\ & \qquad \times (\omega_1 \operatorname{sn}^2 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3) - \frac{e^2}{c}(\omega_1 \operatorname{sn}^2 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3)^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Égalons à zéro les coefficients de $\operatorname{sn}^8 u$ et les termes indépendants de $\operatorname{sn} u$: il vient

$$\left\{\begin{aligned} & a\pi_1^2 + \gamma\chi_1^2 + 2d\pi_1\omega_1 + 2\varepsilon\chi_1\omega_1 = 0, \\ & a\pi_1^2 + 2d\pi_1\omega_1 - \frac{e^2}{c}\omega_1^2 = 0, \\ & a\pi_3^2 + \gamma\chi_3^2 + 2d\pi_3\omega_3 + 2\varepsilon\chi_3\omega_3 = 0. \\ & a\pi_3^2 + 2d\pi_3\omega_3 - \frac{e^2}{c}\omega_3^2 = 0, \end{aligned}\right.$$

de sorte qu'en posant, comme précédemment (19),

$$\left\{\begin{aligned} & \pi_1 = l_1\omega_1, \qquad \pi_2 = l_2\omega_2, \qquad \pi_3 = l_3\omega_3, \\ & \chi_1 = m_1\omega_1, \qquad \chi_2 = m_2\omega_2, \qquad \chi_3 = m_3\omega_3, \end{aligned}\right.$$

l_1, l_3, m_1, m_3 seront déterminés par les équations

$$\begin{cases} al^2 + 2dl - \dfrac{e^2}{c} = 0, \\ al^2 + \gamma m^2 + 2dl + 2\varepsilon m = 0 \end{cases}$$

ou

$$(30) \qquad al^2 + 2dl - \frac{e^2}{c} = 0, \qquad \gamma m^2 + 2\varepsilon m + \frac{e^2}{c} = 0.$$

Ici, les conditions de réalité sont

$$d^2 + \frac{ae^2}{c} > 0, \qquad \varepsilon^2 - \gamma\frac{e^2}{c} > 0,$$

ou

$$c(cd^2 + ae^2) > 0, \qquad c(c\varepsilon^2 - \gamma e^2) > 0,$$

ou encore (25)

$$(31) \qquad -c\Delta_3 > 0, \qquad -c\Delta_1 > 0.$$

Écrivons les équations (24^1, 24^3)

$$\begin{cases} -\gamma c(cy + e)^2 + c^2(\gamma z + \varepsilon)^2 + c\Delta_1 = 0, \\ c^2(ax + d)^2 + ac(cy + e)^2 + c\Delta_3 = 0. \end{cases}$$

Si $\gamma c < 0$, $ac > 0$, la réalité des deux cylindres exige que les conditions (31) soient vérifiées.

Les formules (28) *conviendront par conséquent, à l'exclusion des formules* (16), *si*

$$(32) \quad a > 0 \quad \text{avec} \quad c > 0 \quad \text{et} \quad \gamma < 0 \qquad \text{ou} \qquad a < 0, \quad c < 0, \quad \gamma > 0.$$

2° Posons, au lieu de (16) ou de (28),

$$(33) \quad \begin{cases} cx + d = \dfrac{\tau \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega^2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3}, \qquad y = \dfrac{\pi_1 \operatorname{sn}^4 u + \pi_2 \operatorname{sn}^2 u + \pi_3}{\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3}, \\ z = \dfrac{\chi_2 \operatorname{sn}^4 u + \chi_2 \operatorname{sn}^2 u + \chi_3}{\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3}, \end{cases}$$

et portons ces valeurs de $cx + d$, y, z dans les équations (1^1, 1^2), qui sont

$$\begin{cases} cy^2 - \gamma z^2 + 2ey - 2\varepsilon z = 0, \\ \dfrac{1}{a}(ax + d)^2 + \gamma z^2 + 2\varepsilon z - \dfrac{d^2}{a} = 0; \end{cases}$$

il vient

$$\left\{\begin{aligned}
&c(\pi_1 \operatorname{sn}^2 u + \pi_2 \operatorname{sn}^2 u + \pi_3)^2 - \gamma(\chi_1 \operatorname{sn}^2 u + \chi_2 \operatorname{sn}^2 u + \chi_3)^2 \\
&+ 2c(\pi_1 \operatorname{sn}^2 u + \pi_2 \operatorname{sn}^2 u + \pi_3) \times (\omega_1 \operatorname{sn}^2 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3) \\
&- 2\varepsilon(\chi_1 \operatorname{sn}^2 u + \chi_2 \operatorname{sn}^2 u + \chi_3) \times (\omega_1 \operatorname{sn}^2 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3) = 0; \\
&\frac{1}{a} \operatorname{sn}^2 u (1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u) \\
&\quad + \gamma(\chi_1 \operatorname{sn}^2 u + \chi_2 \operatorname{sn}^2 u + \chi_3)^2 + 2\varepsilon(\chi_1 \operatorname{sn}^2 u + \chi_2 \operatorname{sn}^2 u + \chi_3) \\
&\quad \times (\omega_1 \operatorname{sn}^2 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3) - \frac{d^2}{a}(\omega_1 \operatorname{sn}^2 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3)^2 = 0.
\end{aligned}\right.$$

Exprimons encore que les coefficients de $\operatorname{sn}^8 u$ et les termes indépendants de $\operatorname{sn} u$ sont nuls :

$$\left\{\begin{aligned}
&c\pi_1^2 - \gamma\chi_1^2 + 2c\pi_1\omega_1 - 2\varepsilon\chi_1\omega_1 = 0, \\
&c\pi_3^2 - \gamma\chi_3^2 + 2c\pi_3\omega_3 - 2\varepsilon\chi_3\omega_3 = 0, \\
&\gamma\chi_1^2 + 2\varepsilon\chi_1\omega_1 - \frac{d^2}{a}\omega_1^2 = 0, \\
&\gamma\chi_3^2 + 2\varepsilon\chi_3\omega_1 - \frac{d^2}{a}\omega_3^2 = 0;
\end{aligned}\right.$$

ici, m_1, m_3 d'une part, l_1, l_3 d'autre part, sont racines des équations

$$\left\{\begin{aligned}
&\gamma m^2 + 2\varepsilon m - \frac{d^2}{a} = 0, \\
&cl^2 + 2cl - \frac{d^2}{a} = 0;
\end{aligned}\right.$$

ce qui donne, comme conditions de réalité,

$$\varepsilon^2 - \gamma\frac{d^2}{a} > 0, \qquad c^2 + c\frac{d^2}{a} > 0,$$

ou

$$a(a\varepsilon^2 - \gamma d^2) > 0, \qquad a(ac^2 + cd^2) > 0,$$

ou encore (25)

$$(34) \qquad -a\Delta_2 > 0, \qquad -a\Delta_4 > 0.$$

Les équations (24^2, 24^3), écrites

$$\left\{\begin{aligned}
&a\gamma(ax + d)^2 + a^2(\gamma z - \varepsilon)^2 + a\Delta_2 = 0, \\
&ac(ax + d)^2 + a^2(cy + c)^2 + a\Delta_4 = 0,
\end{aligned}\right.$$

exigent, pour la réalité des cylindres qu'elles représentent, que

$$a\Delta_2 < 0 \quad \text{si} \quad a\gamma > 0 \qquad \textit{et} \qquad a\Delta_3 < 0 \quad \text{si} \quad ac > 0;$$

donc les conditions (33) *sont vérifiées si*

$$a\gamma > 0 \qquad \textit{ou} \qquad ac > 0,$$

ou bien si

$$(35) \quad a > 0 \quad \text{avec} \quad c > 0 \quad \text{et} \quad \gamma > 0 \qquad \textit{ou} \qquad a < 0, \quad c < 0, \quad \gamma < 0.$$

Par conséquent, *la représentation* (32), à l'exclusion des représentations (16) et (28), *convient si les conditions* (34) *sont vérifiées.*

27. Formons le Tableau des différents signes que peuvent avoir a, c, γ et indiquons dans chaque cas les formules à employer et qui sont, en se reportant à (27) pour les formules (16), à (32) pour les formules (28), à (35) pour les formules (33) :

		Signes de a.	Signes de c.	Signes de γ.	Formules à employer.
(36)	1.....	+	+	+	(33)
	2.....	+	+	—	(28)
	3.....	+	—	+	(16)
	4.....	+	—	—	Voir form. (37_a)
	5.....	—	+	+	Voir form. (37_b) [1]
	6.....	—	+	—	(16)
	7.....	—	—	+	(28)
	8.....	—	—	—	(33)

Rien n'est spécifié pour les cas 4 et 5.

1° *Cas de*

				Formules à employer.
(37_a)	1. Si $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$,	ou a	$\gamma\Delta_1 > 0$, $\gamma\Delta_2 < 0$	(16)
	2. Si $\Delta_1 > 0$, $\Delta_3 > 0$,	ou a	$-c\Delta_1 > 0$, $-c\Delta_3 > 0$	(28)
	3. Si $\Delta_2 < 0$, $\Delta_3 < 0$,	ou a	$-a\Delta_2 > 0$, $-a\Delta_3 > 0$	(33)

[1] Les formules (37_b) sont placées dans le texte après les formules (39).

Il ne peut pas se présenter de combinaisons autres que $(3_{7a}^1, 3_{7a}^2, 3_{7a}^3)$. Formons en effet le Tableau des signes de Δ_1, Δ_2, Δ_3 et inscrivons dans la dernière colonne la combinaison (3_{7a}) correspondante :

		Signes de Δ_1.	Δ_2	Δ_3.	Combinaison (3_{7a}) correspondante.
	1	+	+	+	(3_{7a}^2)
(38)	2	+	+	—	»
	3	+	—	+	(3_{7a}^3)
	4	+	—	—	(3_{7a}^3)
	5	—	+	—	(3_{7a}^1)
	6	—	+	—	(3_{7a}^1)
	7	—	—	+	»
	8	—	—	—	(3_{7a}^1)

Il subsiste, *semble-t-il*, les combinaisons $(38^2, 38^7)$.

Or, ces combinaisons ne peuvent pas se présenter. En effet, Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont liés (25) par la relation

$$a\Delta_1 - c\Delta_2 + \gamma\Delta_3 = 0 \tag{39}$$

et, puisque $a > 0$, $c < 0$, $\gamma < 0$, on aurait (38^2)

$$a\Delta_1 > 0, \qquad -c\Delta_2 > 0, \qquad \gamma\Delta_3 > 0,$$

ce qui est incompatible avec (39).

La combinaison (38^7) donnerait de son côté

$$a\Delta_1 < 0, \qquad c\Delta_2 < 0, \qquad \gamma\Delta_3 < 0,$$

ce qui est encore incompatible avec (39).

2° *Examinons maintenant le cas de* $a < 0$, $c > 0$, $\gamma > 0$ (36^3). Nous remarquons que :

					Formules à employer
(3_{7b})	1. Si $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$,	on a	$\gamma\Delta_1 > 0$,	$\gamma\Delta_2 < 0$	(16)
	2. Si $\Delta_1 < 0$, $\Delta_3 < 0$,	on a	$-c\Delta_1 > 0$,	$-c\Delta_3 > 0$	(29)
	3. Si $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$,	on a	$-a\Delta_1 > 0$,	$-a\Delta_3 > 0$	(32)

Formons encore le Tableau des signes de Δ_1, Δ_2, Δ_3 et inscrivons dans

la dernière colonne la combinaison (37_b) correspondante :

		Signes de Δ_1	Δ_2	Δ	Combinaison (37_b) correspondante.
	1	+	+	+	(37_b^1)
	2	+	+	—	»
	3	+	—	+	(37_b^1)
	4	+	—	—	(37_b^1)
(40)	5	—	+	+	(37_b^2)
	6	—	+	—	(37_b^2)
	7	—	—	+	»
	8	—	—	—	(37_b^2)

Il reste les combinaisons (40^2) et (40^7); *puisque* (39)

$$\alpha\Delta_1 - \beta\Delta_2 + \gamma\Delta_3 = 0,$$

ces combinaisons ne peuvent se présenter; on le verrait comme tout à l'heure, en répétant ce qui a été dit à propos du Tableau (38).

28. Conclusion pour l_1, l_3, m_1, m_3. — *Ces quantités sont toujours réelles, sous condition de choisir celles des formules* (16, 28, 33) *qui sont spécifiées dans le Tableau* (36), *complété pour les cas* (36^4, 36^5) *par les Tableaux* (37_a, 37_b).

Il est évident que sous condition de permuter convenablement entre elles les lettres x, y, z, on peut toujours s'arranger de manière à ce que ce soient les formules (16) qui conviennent : *Nous supposerons qu'il en est ainsi dans tout ce qui suit.*

Détermination de $\frac{\overline{\alpha}_1}{\omega_1}$, $\frac{\overline{\alpha}_2}{\omega_2}$, $\frac{\overline{\alpha}_3}{\omega_3}$, $\frac{\overline{\gamma}_1}{\omega_1}$, $\frac{\overline{\gamma}_2}{\omega_2}$, $\frac{\overline{\gamma}_3}{\omega_3}$.

29. Les quantités (19)

$$\frac{\overline{\alpha}_2}{\omega_2} = l_2, \qquad \frac{\overline{\gamma}_2}{\omega_2} = m_2$$

sont déterminées par les relations (20^2, 20^4), n° **28**. Écrivons à nou-

veau les formules (20^2, 20^3) en les mettant sous la forme

$$(41)\qquad \begin{cases} (al_1+d)l_2+(cm_1+e)m_2+dl_1+em_1=0, \\ (al_3+d)l_2+(cm_3+e)m_2+dl_3+em_3=0. \end{cases}$$

Nous obtiendrons, en les ajoutant ensemble, et en les retranchant l'une de l'autre, deux équations qui vont être *fondamentales* pour ce qui suit

$$(42)\qquad [a(l_1+l_3)+2d]l_2+[c(m_1+m_3)+2e]m_2 + d(l_1+l_3)+e(m_1+m_3)=0,$$

$$(43)\qquad (al_2+d)(l_1-l_3)+(cm_2+e)(m_1-m_3)=0.$$

D'autre part, *nous supposons essentiellement que les équations* (22^1, 22^2), *dont* l_1, l_3 *et* m_1, m_3 *sont respectivement racines, ont chacune leurs deux racines distinctes;* car si les racines de (21^1) sont égales l'une à l'autre,

$$d^2+a\frac{\varepsilon^2}{\gamma} \quad \text{ou} \quad (25)\ \Delta_2$$

est nul, ce qui fait que le cylindre (1^2) se décompose en deux plans, et la quartique en deux coniques, cas dépourvu d'intérêt.

De même si l'équation (22^2) a ses deux racines égales, c'est le cylindre (1^4) qui se décompose en deux plans.

1° *On ne peut avoir*

$$l_1=l_3 \qquad \text{avec} \qquad m_1=m_3.$$

Dans cette hypothèse en effet (22^1),

$$l_1+l_3=-\frac{2d}{a}, \qquad m_1+m_3=-\frac{2e}{c},$$

et l'équation (42) se réduit à

$$-\frac{2d^2}{a}-\frac{2e^2}{c}=0,$$

ou (25)

$$\Delta_3=0;$$

ce serait alors le cylindre (1^3) qui se décomposerait en deux plans :

2° l_1 *et* l_3 *ne peuvent être égaux à une même racine de l'équation* (22^1), *si* m_1 *et* m_3 *sont aussi égaux à une même racine de* (22^2); *autrement dit, les racines de* (22^1) *étant distinctes l'une de l'autre,*

ainsi que les racines de (22^2), selon l'hypothèse faite, $\left(d^2 + a\frac{\varepsilon^2}{\gamma} \neq 0,\right.$ $\left. e^2 - c\frac{\varepsilon^2}{\gamma} \neq 0\right)$, *on ne peut avoir*

$$l_1 = l_3, \qquad m_1 = m_3.$$

Nous allons voir que, *s'il en était ainsi*, Δ_3 *serait encore nul.*

L'équation (20^3) peut en effet être écrite

$$2[al_1 l_3 + cm_1 m_3 + d(l_1 + l_3) + e(m_1 + m_3)]\omega_1\omega_3$$
$$+ (al_2^2 + cm_2^2 + 2dl_2 + 2em_2)\omega_2^2 = 0;$$

si

$$l_1 = l_3, \qquad m_1 = m_3 \qquad \left(d^2 + a\frac{\varepsilon^2}{\gamma} = 0,\ e^2 - c\frac{\varepsilon^2}{\gamma} = 0\right),$$

on a

$$al_1 l_3 + cm_1 m_3 + d(l_1 + l_3) + e(m_1 + m_3) = (al_1^2 + 2dl_1) + (cm_1^2 + 2em_1)$$

ou (22^4, 22^2)

$$al_1 l_3 + cm_1 m_3 + d(l_1 + l_3) + e(m_1 + m_3) = 0;$$

l'équation (20^3) devient alors

$$(al_2^2 + cm_2^2 + 2dl_2 + 2em_2)\omega_2^2 = 0;$$

$\omega_2 = 0$ impliquerait $\tau = 0$ (21^4) et $\gamma\tau + \varepsilon = 0$ (16); donc, dans notre hypothèse,

$$(44) \qquad al_2^2 + cm_2^2 + 2dl_2 + 2em_2 = 0.$$

A cette équation nous allons adjoindre celles-ci (22^4, 22^2, 41^4) :

$$(45) \qquad \left\{\begin{aligned} & al_1^2 + 2dl_1 - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = 0, \\ & cm_1^2 + 2cm_1 + \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = 0, \\ & (al_1 + d)l_2 + (cm_1 + e)m_2 + dl_1 + em_1 = 0. \end{aligned}\right.$$

a. Combinons d'abord les équations (44, 45^1, 45^2) en ajoutant ensemble (45^1, 45^2), ce qui donne

$$al_1^2 + 2dl_1 + cm_1^2 + 2em_1 = 0,$$

et en retranchant l'équation (44) de celle-ci ; il vient

$$(46) \qquad [a(l_1 + l_2) + 2d](l_1 - l_2) + [c(m_1 + m_2) + 2e](m_1 - m_2) = 0.$$

b. Combinons ensuite les équations (45^1, 45^2, 45^3), dont la dernière n'est pas encore intervenue, en retranchant de (45^3) l'équation (46), combinaison de (44, 45^1, 45^2), ce qui donne (44)

$$[(al_1+d)l_2-al_1^2]+[(cm_1+e)m_2-cm_1^2]-dl_1-em_1=0,$$

ou

$$a(l_1l_2-l_1^2)+c(m_1m_2-m_1^2)+d(l_2-l_1)+e(m_2-m_1)=0,$$

ou encore

$$(al_1+d)(l_2-l_1)+(cm_1+e)(m_2-m_1)=0. \tag{47}$$

c. Nous pouvons écrire l'équation (46) *de la manière suivante :*

$$(al_1+d)(l_2-l_1)+(al_2+d)(l_2-l_1)$$
$$+(cm_1+e)(m_2-m_1)+(cm_2+e)(m_2-m_1=0);$$

donc (47)

$$(al_2+d)(l_2-l_1)+(cm_2+e)(m_2-m_1)=0. \tag{48}$$

Retranchons (47) de (48); il vient

$$a(l_2-l_1)^2+c(m_2-m_1)^2=0,$$

d'où nous tirons

$$\left(\frac{l_1-l_2}{m_1-m_2}\right)^2=-\frac{c}{a};$$

portons dans (47), écrite préalablement,

$$(al_1+d)^2(l_2-l_1)^2=(cm_1+e)^2(m_2-m_1)^2;$$

il vient

$$(a^2l_1^2+2adl_1+d^2)c=(c^2m_1^2+2cem_1+e^2)a=0,$$
$$[a(al_1^2+2dl_1)+d^2]c+[c(cm_1^2+2em_1)+e^2]a=0,$$

ou (45)

$$\left(a\frac{\varepsilon^2}{\gamma}+d^2\right)c+\left(-c\frac{\varepsilon^2}{\gamma}+e^2\right)a=0,$$

ou encore (25)

$$d^2c+e^2a-\Delta_3=0.$$

Nous avons remarqué qu'alors le cylindre (1^3), dont Δ_3 est le discriminant, se décompose en deux plans.

3° *Il ne reste donc* (43) *que deux hypothèses possibles : ou bien*

$$l_1=l_2, \qquad m_1=m_2.$$

ou bien

$$l_1 = l_3, \qquad m_1 \neq m_3.$$

Nous allons les étudier et *nous verrons que l'une ou l'autre convient, suivant les cas.*

50. *a. Cas de*

$$(49) \qquad l_1 \neq l_3, \qquad m_1 = m_3;$$

ici (45)

$$(50) \qquad l_1 + l_3 = -\frac{2d}{a}, \qquad l_1 l_3 = -\frac{\varepsilon^2}{a\gamma}, \qquad cm_1^2 + 2em_1 + \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = 1.$$

L'équation (43) donne

$$al_2 + d = 0,$$

d'où

$$(51) \qquad l_2 = -\frac{d}{a}.$$

Portons cette valeur de l_2 dans l'équation (44); il vient

$$-(al_1 + d)\frac{d}{a} + (cm_1 + e)m_2 + dl_1 + em_1 = 0,$$

$$-d^2 + a(cm_1 + e)m_2 + aem_1 = 0,$$

$$(52) \qquad m_2 = \frac{d^2 - aem_1}{a(cm_1 + e)}.$$

b. Cas de

$$l_1 = l_3, \qquad m_1 \neq m_3;$$

ici (45)

$$(53) \qquad al_1^2 + 2el_1 + \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = 0, \qquad m_1 + m_3 = -\frac{2e}{c}, \qquad m_1 m_3 = \frac{\varepsilon^2}{c\gamma}.$$

L'équation (43) donne

$$cm_2 + e = 0,$$

d'où

$$(54) \qquad m_2 = -\frac{e}{c};$$

portons cette valeur de m_2 dans l'équation (41^4); nous aurons

$$(al_1+d)l_2-(cm_1+e)\frac{e}{c}+dl_1+em_1=0,$$

$$c(al_1+d)l_2-e^2+dcl_1=0,$$

$$l_2=\frac{e^2-cdl_1}{c(al_1+d)}. \tag{55}$$

51. Résume *concernant* l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3 *ou* $\frac{\pi_1}{\omega_1}, \ldots, \frac{\chi_3}{\omega_3}$:

1° *Ou bien* l_1 et l_3 sont les deux racines *différentes* de l'équation

$$al^2+2dl-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}=0$$

et alors m_1, m_3 sont égaux à une *même* racine m_1 de l'équation

$$cm^2+2em+\frac{\varepsilon^2}{\gamma}=0;$$

dans ce cas

$$l_2=-\frac{d}{a}, \qquad m_2=\frac{d^2-aem_1}{a(cm_1+e)}; \tag{56^1}$$

mais on peut prendre aussi (41^2)

$$m_2=\frac{d^2-aem_3}{a(cm_3+e)};$$

2° *Ou bien* m_1 et m_3 sont les deux racines *différentes* de l'équation

$$cm^2+2em+\frac{\varepsilon^2}{\gamma}=0$$

et alors l_1, l_3 sont égaux à une *même* racine l_1 de l'équation

$$al^2+2dl-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}=0;$$

dans ce cas

$$l_2=\frac{e^2-cdl_1}{c(al_1+d)}, \qquad m_2=\frac{e}{c}, \tag{56^2}$$

et l'on peut prendre aussi (41, 2)

$$l_2=\frac{e^2-cdl_3}{c(al_3+d)}.$$

Calcul de $\frac{\omega_1}{\omega_2}$, $\frac{\omega_3}{\omega_2}$.

52. *Revenons aux équations* (20, 21). Multiplions les équations (21^2, 21^4) par 2 et ajoutons-les à (21^3), de manière à éliminer τ^2 et k^2. Il vient

$$(57)\qquad \begin{aligned} &2\left[al_1l_2+d(l_1+l_2)-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right]\omega_1\omega_2 \\ &\quad+a(l_2^2\omega_2^2+2l_1l_3\omega_1\omega_3)+2d[(l_1-l_3)\omega_1\omega_3-l_2\omega_2^2] \\ &\quad-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}(\omega_2^2+2\omega_1\omega_3)+2\left[al_2l_3+d(l_2+l_3)-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right]\omega_2\omega_3=0. \end{aligned}$$

D'autre part, écrivons (20^3) comme il suit :

$$(58)\qquad \begin{aligned} &2[al_1l_3-cm_1m_3+d(l_1+l_3)+2(m_1+m_3)]\omega_1\omega_3 \\ &\quad+(al_2^2+cm_2^2+2dl_2+2em_2)\omega_2^2=0. \end{aligned}$$

Les équations (58, 57_7) équivalent au système

$$\omega_1=\nu\omega_2,\qquad \omega_3=\sigma\omega_2.$$

$$(59)\qquad \left\{\begin{aligned} &2[al_1l_3+cm_1m_3+d(l_1+l_3)+e(m_1+m_3)]\nu\sigma \\ &\qquad+al_2^2+cm_2^2+2dl_2+2em_2=0, \\ &2\left[al_1l_2+d(l_1+l_2)-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right]\nu\sigma+2\left[al_1l_2+d(l_1+l_2)-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right]\nu \\ &\qquad+2\left[al_2l_3+d(l_2+l_3)-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right]\sigma \\ &\qquad+al_2^2+2dl_2-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}=0. \end{aligned}\right.$$

Nous allons éliminer l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3 *de ces équations*, en distinguant les deux cas spécifiés au n° **51**.

Premier cas (n° **51**). — Calculons les coefficients de $\nu\sigma$, ν, σ, ... figurant dans les équations (59).

Tout d'abord (n° **31**, 1°)

$$(a)\qquad \begin{aligned} &al_1l_3 + cm_1m_3 + d(l_1+l_3) + e(m_1+m_3)\\ &\quad = al_1l_3 + d(l_1+l_3) + [cm_1m_3 + e(m_1+m_3)]\\ &\quad = -\frac{\varepsilon^2}{\gamma} - \frac{2d^2}{a} + (cm_1^2 + 2em_1)\\ &\quad = -\frac{\varepsilon^2}{\gamma} - \frac{2d^2}{a} - \left(\frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right)\\ &\quad = -\frac{2}{a\gamma}(a\varepsilon^2 + \gamma d^2) \end{aligned}$$

ou (25)

$$(60)\qquad al_1l_3 + cm_1m_3 + d(l_1+l_3) + e(m_1+m_3) = \frac{2\Delta_2}{a\gamma}.$$

Ensuite

$$(b)\quad \begin{aligned} &al_2^2 + cm_2^2 + 2dl_2 + 2em_2\\ &\quad = \frac{c(d^2 - aem_1)^2 - ad^2(cm_1+e)^2 + 2ae(d^2 - aem_1)(cm_1+e)}{a^2(cm_1+e)^2}; \end{aligned}$$

le *numérateur* du second membre peut être écrit successivement

$$\begin{aligned} &-ac(ae^2+cd^2)m_1^2 - 2ae(ae^2+cd^2)m_1 + d^2(ae^2+cd^2),\\ &-[a(cm_1^2+2em_1) - d^2](ae^2+cd^2),\\ &-\left(-a\frac{\varepsilon^2}{\gamma} - d^2\right)(ae^2+cd^2) \end{aligned}$$

ou (25)

$$\frac{\Delta_2\Delta_3}{\gamma};$$

le dénominateur a pour expression

$$\begin{aligned} a^2(cm_1+e)^2 &= a^2(c^2m_1^2 + 2cm_1 + e^2)\\ &= a^2\left[c\left(-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right) + e^2\right]\\ &= \frac{a^2}{\gamma}(\gamma\varepsilon - c\varepsilon^2)\\ &= \frac{a^2\Delta_1}{\gamma}; \end{aligned}$$

par conséquent

$$(61)\qquad al_2^2 + cm_2^2 + 2dl_2 + 2em_2 = \frac{\Delta_2\Delta_3}{a^2\Delta_1}.$$

Passons aux coefficients de l'équation (59²); ici

$$(c)\qquad al_1l_3 + d(l_1 + l_3) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = -\frac{\varepsilon^2}{\gamma} - 2\frac{d^2}{a} - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}$$

$$= -\frac{2}{a\gamma}(a\varepsilon^2 + \gamma d^2),$$

$$(62)\qquad al_1l_3 + d(l_1 + l_3) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = \frac{2\Delta_2}{a\gamma}.$$

Nous avons

$$(d)\qquad al_1l_2 + d(l_1 + l_2) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = -l_1d + d\left(l_1 - \frac{d}{a}\right) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}$$

$$= -\frac{d^2}{a} - \frac{\varepsilon^2}{\gamma},$$

$$(63)\qquad al_1l_2 + d(l_1 + l_2) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = \frac{\Delta_2}{a\gamma}.$$

$$(e)\qquad al_2l_3 + d(l_2 + l_3) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = -l_3d + d\left(l_3 - \frac{d}{a}\right) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma},$$

$$(64)\qquad al_2l_3 + d(l_2 + l_3) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = \frac{\Delta^2}{a\gamma}.$$

$$(f)\qquad al_2^2 + 2dl_2 - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = \frac{d^2}{a} + 2d\left(-\frac{d}{a}\right) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}$$

$$= -\frac{d^2}{a} - \frac{\varepsilon^2}{\gamma},$$

$$(65)\qquad al_2^2 + 2dl_2 - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = \frac{\Delta_2}{a\gamma}.$$

Il résulte de ces formules que les équations (59) s'écrivent

$$\frac{4\Delta_2}{a\gamma}\nu\sigma + \frac{\Delta_2\Delta_3}{a^2\Delta_1} = 0, \qquad \frac{4\Delta_2}{a\gamma}\nu\sigma + \frac{2\Delta_2}{a\gamma}(\nu + \sigma) + \frac{\Delta_2}{a\gamma} = 0;$$

comme nous supposons que Δ_2 (discriminant de la conique 1^2) n'est pas nul, elles se réduisent à

$$\frac{4}{\gamma}\nu\sigma + \frac{\Delta_3}{a\Delta_1} = 0, \qquad (2\nu + 1)(2\sigma + 1) = 0,$$

et admettent les deux systèmes de solutions *réelles*

$$(66^1)\qquad \begin{cases} \nu' = -\dfrac{1}{2}, & \sigma' = \dfrac{\gamma}{2a}\dfrac{\Delta_3}{\Delta_1}, \\[2ex] \nu'' = \dfrac{\gamma}{2a}\dfrac{\Delta_3}{\Delta_1}, & \sigma'' = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Ces formules correspondent au premier cas du n° **51**.

Deuxième cas (n° **51**). — Reprenons le calcul des coefficients $\nu\sigma$, ν, ..., qui figurent dans les équations (59) en partant des données (56^2).

On a

$$(a)\qquad \begin{aligned} &al_1l_3 + cm_1m_3 + d(l_1+l_3) + e(m_1+m_3)\\ &\quad = al_1^2 + 2dl_1^2 + [cm_1m_3 + e(m_1+m_3)], \end{aligned}$$

$$(67)\qquad \begin{aligned} &al_1l_3 + cm_1m_3 + d(l_1+l_3) + e(m_1+m_3)\\ &\quad = \frac{\varepsilon^2}{\gamma} + \left(\frac{\varepsilon^2}{\gamma} - \frac{2e^2}{c}\right) = \frac{2}{c\gamma}(c\varepsilon^2 - \gamma e^2) = -\frac{2\Delta}{\gamma}. \end{aligned}$$

$$(b)\qquad \begin{aligned} &al_2^2 + cm_2^2 + 2dl_2 + 2em_2\\ &\quad = \frac{a(e^2 - cdl_1)^2 - ce^2(al_1+d)^2 + 2cd(e^2 - cdl_1)(al_1+d)}{c^2(al_1+d)^2}; \end{aligned}$$

écrivons le numérateur

$$-ac(ae^2 + cd^2)l_1^2 - 2cd(ae^2 + cd^2)l_1 + e^2(ae^2 + cd^2)$$

ou

$$[-c(al_1^2 + 2dl_1) + e^2](ae^2 + cd^2).$$

$$\left(-\frac{c\varepsilon^2}{\gamma} + e^2\right)(ae^2 + cd^2);$$

on voit qu'il a pour expression (25),

$$-\frac{\Delta_1\Delta_3}{\gamma};$$

quant au dénominateur, il n'est autre que

$$\begin{aligned} c^2(al_1^2 + d^2)^2 &= c^2[a(al_1^2 + 2dl_1) + d^2]\\ &= c^2\left(a\frac{\varepsilon^2}{\gamma} + d^2\right) = \frac{c^2}{\gamma}(-\Delta_2); \end{aligned}$$

ainsi,

$$(68)\qquad al_2^2 + cm_2^2 + 2dl_2 + 2em_2 = \frac{\Delta_1\Delta_3}{c^2\Delta_2}.$$

$$(c)\qquad al_1l_3 + d(l_1+l_3) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = al_1^2 + 2dl_1 - \frac{\varepsilon^2}{\gamma},$$

$$(69)\qquad al_1l_3 + d(l_1+l_3) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = 0.$$

$$(d)\quad al_1l_2+d(l_1+l_2)-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}=al_1\frac{e^2-cdl_1}{c(al_1+d)}+d\left[l_1+\frac{e^2-cdl_1}{c(al_1+d)}\right]-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}$$

$$=\frac{al_1(e^2-cdl_1)+cdl_1(al_1+d)+d(e^2-cdl_1)}{c(al_1+d)}-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}$$

$$=\frac{(al_1+d)e^2}{c(al_1+d)}-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}=\frac{e^2}{c}-\frac{\varepsilon^2}{\gamma},$$

$$(70)\qquad al_1l_2+d(l_1+l_2)-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}=\frac{\Delta_1}{c\gamma}.$$

$$(e)\qquad al_2l_3+d(l_2+l_3)-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}=al_2l_1+d(l_2+l_1)-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}$$

ou (70)

$$(71)\qquad al_2l_3+d(l_2+l_3)-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}=\frac{\Delta_1}{c\gamma}.$$

$$(f)\qquad al_2^2+2dl_2-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}=(al_2^2+cm_2^2+2dl_2+2cm_2)-(cm_2^2+2cm_2)-\frac{\varepsilon^2}{\gamma},$$

ou (68)

$$al_2^2+2dl_2-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}=\frac{\Delta_1\Delta_3}{c^2\Delta_2}-\left(\frac{e^2}{c}-2e\frac{e}{c}\right)-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}$$

$$=\frac{\Delta_1\Delta_3}{c^2\Delta_2}+\frac{e^2}{c}-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}$$

$$=\frac{\Delta_1\Delta_3}{c^2\Delta_2}+\frac{1}{c\gamma}(\gamma e^2-c\varepsilon^2)$$

$$=\frac{\Delta_1\Delta_3}{c^2\Delta_2}+\frac{\Delta_1}{c\gamma},$$

$$(72)\qquad al_2^2+2dl_2-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}=\frac{\Delta_1}{c}\,\frac{\gamma\Delta_3+c\Delta_2}{\gamma c\Delta_2}.$$

Portons dans les équations (59). Nous aurons

$$\frac{\gamma\Delta_1}{c\gamma}\nu\sigma+\frac{\Delta_1\Delta_3}{c^2\Delta_2}=0,\qquad 2\frac{\Delta_1}{c\gamma}(\nu+\sigma)+\frac{\Delta_1}{c}\,\frac{\gamma\Delta_3+c\Delta_2}{\gamma c\Delta_2}=0$$

ou ($\Delta_1\neq 0$),

$$\gamma\nu\sigma+\frac{\gamma}{c}\frac{\Delta_3}{\Delta_2}=0,\qquad 2(\nu+\sigma)+\frac{\gamma\Delta_3+c\Delta_2}{c\Delta_2}=0;$$

ν et σ sont donc les racines de l'équation

$$\Sigma^2+\frac{1}{2}\,\frac{\gamma\Delta_3+c\Delta_2}{c\Delta_2}\Sigma+\frac{\gamma}{\gamma c}\frac{\Delta_3}{\Delta_2}=0$$

qu'on peut écrire

$$\gamma c\Delta_2\Sigma^2+2(\gamma\Delta_3+c\Delta_2)\Sigma+\gamma\Delta_3=0.$$

On en tire

$$\Sigma = \frac{-(\gamma\Delta_3 + c\Delta_2) \pm \sqrt{(\gamma\Delta_3 + c\Delta_2)^2 - 4c\gamma\Delta_2\Delta_4}}{4c\Delta_2} = \frac{-(\gamma\Delta_3 + c\Delta_2) \pm (\gamma\Delta_3 - c\Delta_2)}{4c\Delta_2},$$

$$\Sigma_1 = \frac{-(\gamma\Delta_3 + c\Delta_2) + (\gamma\Delta_3 - c\Delta_2)}{4c\Delta_2} = -\frac{1}{2},$$

$$\Sigma_2 = \frac{-(\gamma\Delta_3 + c\Delta_2) - (\gamma\Delta_3 - c\Delta_2)}{4c\Delta_2} = -\frac{\gamma}{2c}\frac{\Delta_3}{\Delta_2};$$

Nous avons ainsi deux *nouveaux* systèmes de valeurs pour ν et σ, qui sont :

$$(66^2)\qquad \begin{cases} \nu''' = -\dfrac{1}{2}, & \sigma''' = -\dfrac{\gamma}{2c}\dfrac{\Delta_3}{\Delta_2}, \\ \nu^{\text{IV}} = -\dfrac{\gamma}{2c}\dfrac{\Delta_3}{\Delta_2}, & \sigma^{\text{IV}} = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Ces formules correspondent au deuxième cas du n° **51**.

Détermination de $\dfrac{\tau^2}{\omega_2^2}$.

55. L'équation (21^4) donne

$$(73)\qquad \frac{1}{2\gamma}\frac{\tau^2}{\omega_2^2} = \left[al_2l_3 + d(l_2 + l_3) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right]\frac{\omega_4}{\omega_2} = 0$$

ou

$$(74)\qquad \frac{1}{2\gamma}\frac{\tau^2}{\omega_2^2} = -\left[al_2l_3 + d(l_2 + l_3) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right]\sigma.$$

Pour σ', σ'', nous avons (64)

$$al_2l_3 + d(l_2 + l_3) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = \frac{\Delta_2}{a\gamma};$$

ainsi (66^4),

$$\frac{1}{2\gamma}\frac{\tau'^2}{\omega_2^2} = -\frac{\Delta_2}{a\gamma}\sigma', \qquad \frac{1}{2\gamma}\frac{\tau''^2}{\omega_2^2} = -\frac{\Delta_2}{a\gamma}\sigma'';$$

il en résulte, en remplaçant σ' et σ'' par leurs valeurs (66^4),

$$(75)\qquad \frac{1}{2\gamma}\frac{\tau'^2}{\omega_2^2} = -\frac{\Delta_2}{a\gamma}\frac{\gamma}{2a}\frac{\Delta_3}{\Delta_4} = -\frac{\Delta_2\Delta_3}{2a^2\Delta_4}, \qquad \frac{1}{2\gamma}\frac{\tau''^2}{\omega_2^2} = \frac{\Delta_2}{2a\gamma}$$

et

$$(76)\qquad \frac{\tau'^2}{\omega_2^2} = -\gamma\frac{\Delta_2\Delta_3}{a^2\Delta_4}, \qquad \frac{\tau''^2}{\omega_2^2} = \frac{\Delta_2}{a},$$

valeurs de $\dfrac{\tau^2}{\omega_2^2}$ *qui correspondent, comme* σ', σ'', *au premier cas du* n° **11**.

54. Nous avons ensuite, pour σ''', σ^{IV} (71),

$$al_2 l_3 + d(l_2 + l_3) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = \frac{\Delta_1}{c\gamma}$$

et (74)

$$\frac{1}{2\gamma}\frac{\tau'''^2}{\omega_2^2} = -\frac{\Delta_1}{c\gamma}\sigma''', \qquad \frac{1}{2\gamma}\frac{\tau^{\text{IV}2}}{\omega_2^2} = -\frac{\Delta_1}{c\gamma}\sigma^{\text{IV}},$$

$$(77)\qquad \frac{1}{2\gamma}\frac{\tau'''^2}{\omega_2^2} = -\frac{\Delta_1}{c\gamma}\left(-\frac{\gamma}{2c}\frac{\Delta_3}{\Delta_2}\right) = \frac{\Delta_1\Delta_3}{2c^2\Delta_2}, \qquad \frac{1}{2\gamma}\frac{\tau^{\text{IV}2}}{\omega_2^2} = -\frac{\Delta_1}{c\gamma}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Delta_1}{2c\gamma},$$

$$(78)\qquad \frac{\tau'''^2}{\omega_2^2} = \frac{\gamma_1\Delta_1\Delta_3}{c^2\Delta_2} = \frac{(\gamma\Delta_1)\Delta_3}{c^2\Delta_2}, \qquad \frac{\tau^{\text{IV}2}}{\omega_2^2} = \frac{\Delta_1}{c}.$$

55. *Réalité de* $\frac{\tau}{\omega_2}$. — On peut écrire (76, 26)

$$\frac{\tau'^2}{\omega_2^2} = \frac{(-\gamma\Delta_2)\Delta_3}{a^2\Delta_1}, \qquad (-\gamma\Delta_2) > 0;$$

$\frac{\tau'^2}{\omega_2^2}$ *est donc positif si* Δ_3 *et* Δ_1 *sont de même signe, donc si* $\gamma\Delta_3$ *est positif, puisque* (26) $\gamma\Delta_1$ *est positif;*

$\frac{\tau''^2}{\omega_2^2}$ *est positif si* a *et* Δ_2 *sont de même signe, ou bien si* $a\gamma$ *et* $\gamma\Delta_2$ *sont de même signe, ou encore, puisque* (26) $\gamma\Delta_2$ *est positif, si* $a\gamma$ *est négatif;*

$\frac{\tau'''^2}{\omega_2^2}$ *est positif si* Δ_3 *et* Δ_2 *sont de même signe, ou si* $\gamma\Delta_3$ *et* $\gamma\Delta_2$ *sont de même signe, donc si* $\gamma\Delta_3 < 0$;

$\frac{\tau^{\text{IV}2}}{\omega_2^2}$ *est positif si* $\frac{\gamma\Delta_1}{c\gamma}$ *est positif, ou si* $c\gamma$ *est positif* (26).

Il est essentiel de noter ici que les valeurs négatives de $\frac{\tau^2}{\omega_2^2}$ *doivent être acceptées, et que cela ne contredit pas la condition de réalité imposée à tous les éléments.*

Soit en effet

$$(79)\qquad \frac{\tau}{\omega} = i\tau_1 \qquad (i = \sqrt{-1},\ \tau_1 \text{ réel}).$$

On sait que

$$(80)\qquad \operatorname{sn}(vi, k) = i\frac{\operatorname{sn}(v, k')}{\operatorname{cn}(v, k')}, \quad \operatorname{cn}(vi, k) = \frac{1}{\operatorname{cn}(v, k')}, \quad \operatorname{dn}(vi, k) = \frac{\operatorname{dn}(v, k')}{\operatorname{cn}(v, k')};$$

il en résulte que, si $\frac{\tau}{\omega}$ *a la forme* (79), *le changement de* u *en* vi

dans les formules (16) *donne des formules tout à fait analogues, mais d'où les imaginaires sont exclues.* Nous aurons à faire usage tout à l'heure de cette remarque.

Ajoutons que *le signe* $\pm$ *dont* $\frac{\tau}{\omega}$ *est toujours affecté ne donne pas deux formes à* $\gamma z + \varepsilon$ (16), *mais une seule;* en effet,

$$\operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn} u, \qquad \operatorname{cn}(-u) = \operatorname{cn} u, \qquad \operatorname{dn}(-u) = \operatorname{dn} u;$$

donc le changement de u en $-u$ dans les formules (16) ramène l'une à l'autre les deux formules (16) correspondant respectivement à $+\frac{\tau}{\omega_2}$, $-\frac{\tau}{\omega_2}$.

Détermination de k^2.

56. Nous avons maintenant (21^2, 59^1)

$$\frac{1}{2\gamma}\frac{\tau^2}{\omega_2^2}k^2 = -\left[a l_1 l_2 + d(l_1 + l_2) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right]\frac{\omega_1}{\omega_2},$$

$$(81) \qquad \frac{1}{2\gamma}\frac{\tau^2}{\omega_2^2}k^2 = -\left[a l_1 l_2 + d(l_1 + l_2) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right]\nu.$$

1° *Pour* ν' et ν'' (63)

$$-\left[a l_1 l_2 + d(l_1 + l_2) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right] = -\frac{\Delta_2}{a\gamma};$$

donc (79, 66, 75)

$$\frac{1}{2\gamma}\frac{\tau'^2}{\omega_2^2}(k^2)' = -\frac{\Delta_2}{a\gamma}\nu' = -\frac{\Delta_2}{a\gamma}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Delta_2}{2a\gamma},$$

$$-\frac{\Delta_2\Delta_3}{2a^2\Delta_1}(k^2)' = \frac{\Delta_2}{2a\gamma},$$

$$(82) \qquad (k^2)' = -\frac{a\Delta_1}{\gamma\Delta_3}.$$

Ensuite

$$\frac{1}{2\gamma}\frac{\tau''^2}{\omega_2^2}(k^2)'' = -\frac{\Delta_2}{a\gamma}\nu'' = -\frac{\Delta_2}{a\gamma}\left(\frac{\gamma}{2a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right),$$

ou (75)

$$\frac{\Delta_2}{2a\gamma}(k^2)'' = -\frac{\Delta_2}{a\gamma}\left(\frac{\gamma}{2a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right),$$

$$(83) \qquad (k^2)'' = -\frac{\gamma}{a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}.$$

2° *Passons à* $(k^2)'''$, $(k^2)^{\text{IV}}$. Ici, où ce sont ν''' et ν^{IV} qui interviennent, on a (70)

$$-\left[al_1l_2+d(l_1+l_2)-\frac{\xi^2}{\gamma}\right]=-\frac{\Delta_2}{a\gamma};$$

donc (81)

$$\frac{1}{2\gamma}\frac{\xi'''^2}{\omega_2^2}(k^2)'''=-\frac{\Delta_1}{c\gamma}\nu'''=-\frac{\Delta_1}{c\gamma}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Delta_1}{2c\gamma},$$

$$\frac{\xi'''^2}{\omega_2^2}(k^2)'''=\frac{\Delta_1}{c}$$

et (78)

$$\frac{\gamma\Delta_1\Delta_3}{c^2\Delta_2}(k^2)'''=\frac{\Delta_1}{c},\qquad \frac{\gamma}{c}\frac{\Delta_3}{\Delta_2}(k^2)'''=1,$$

(84) $$(k^2)'''=\frac{c\Delta_2}{\gamma\Delta_3}.$$

En dernier lieu,

$$\frac{1}{2\gamma}\frac{\xi^{\text{IV}2}}{\omega_2^2}(k^2)^{\text{IV}}=-\frac{\Delta_1}{c\gamma}\nu^{\text{IV}}=-\frac{\Delta_1}{c\gamma}\left(-\frac{1}{2}\frac{\gamma}{c}\frac{\Delta_3}{\Delta_2}\right)=\frac{\gamma\Delta_1\Delta_3}{2c^2\gamma\Delta_2},$$

ou (77)

$$\frac{\Delta_1}{2c\gamma}(k^2)^{\text{IV}}=\frac{\gamma\Delta_1\Delta_3}{2c^2\gamma\Delta_2};$$

donc

(85) $$(k^2)^{\text{IV}}=\frac{\gamma\Delta_3}{c\Delta_2}.$$

57. *Réalité de k.* — Il n'en est plus ici comme pour $\frac{\xi}{\omega}$; k doit être réel et de plus compris entre -1 et $+1$:

1° $(k^2)'=-\frac{a\Delta_1}{\gamma\Delta_3}$ est positif si $-\frac{a(\gamma\Delta_1)}{\gamma^2\Delta_3}>0$ ou (26) si $a\Delta_3<0$;

2° $(k^2)''=-\frac{\gamma\Delta_3}{a\Delta_1}=\frac{-\gamma^2\Delta_3}{a(\gamma\Delta_1)}$, où (26) $\gamma\Delta_1>0$, est positif si $a\Delta_3<0$;

3° $(k^2)'''=\frac{c\Delta_2}{\gamma\Delta_3}=\frac{c(\gamma\Delta_2)}{\gamma^2\Delta_3}$, où (26) $\gamma\Delta_2<0$, est positif si $c\Delta_3<0$;

4° $(k^2)^{\text{IV}}=\frac{\gamma\Delta_3}{c\Delta_2}$ est positif si $c\Delta_3<0$.

Construisons le Tableau des signes de $\frac{\xi^2}{\omega_2^2}$, $\frac{\xi''^2}{\omega_2^2}$, $\frac{\xi'''^2}{\omega_2^2}$, $\frac{\xi^{\text{IV}2}}{\omega_2^2}$ *et des valeurs positives de* $(k^2)'$, $(k^2)''$, $(k^2)'''$, $(k^2)^{\text{IV}}$, en fonction des signes de γ, a, c, Δ_3 :

	γ.	a.	c.	Δ.	$\frac{\zeta'^2}{\omega_2^2}$.	$\frac{\zeta''^2}{\omega_2^2}$.	$\frac{\zeta'''^2}{\omega_2^2}$.	$\frac{\zeta^{\text{IV}2}}{\omega_2^2}$.	$(k^2)'$.	$(k^2)''$.	$(k^2)'''$.	$(k^2)^{\text{IV}}$.
1.....	+	—	—	+	+	+	—	—	+	+	+	+
2.....	+	—	+	—	—	+	+	+			+	+
3.....	+	+	—	—	—	—	+	—	+	+		
4.....	+		+	+	+	+	—	+	+	+		
5.....	+	+	—	+	+	—	—	—			—	—
6.....	+	+	+	—	—	—	+	+	+	+	+	+
7.....	—	—	—	+	—	—	+	+	+	+	+	+
8.....	—	—	+	—	+	—	—	—			+	+
9.....	—	+	—	—	+	+	—	+	+	+		
10.....	—	—	+	+	—	—	+	—	+	+		
11.....	—	+	—	+	—	+	+	+			+	+
12.....	—	+	+	—	+	+	—	—	+	+	—	+

Nous allons voir qu'en fait les deux ou même quatre valeurs de k^2 correspondant aux divers cas se réduisent toujours à une seule.

Nous remarquons en premier lieu que (82 à 85)

$$(86) \qquad (k^2)' \times (k^2)'' = 1, \qquad (k^2)''' \times (k^2)^{\text{IV}} = 1.$$

Une seule des deux valeurs $(k^2)'$ ou $(k^2)''$ est donc acceptable, et une seule des deux valeurs $(k^2)'''$ ou $(k^2)^{\text{IV}}$ est donc acceptable, ce qui fait que k^2 n'a qu'une seule valeur acceptable dans les cas 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11 *et ne peut en avoir plus de deux dans les cas* 1, 6, 7, 12.

Nous allons montrer que *si $(k^2)'$ et $(k^2)'''$, qui sont liés par la relation* (82, 84, 38)

$$(87) \qquad (k^2)' + (k^2)''' = -\frac{a\Delta_1}{\gamma\Delta_3} + \frac{c\Delta_2}{\gamma\Delta_3} = 1,$$

sont l'un et l'autre acceptables (ils le sont ou ne le sont pas, en même temps), *ce qui peut se présenter dans les cas* 1, 6, 7, 12, *il en résulte deux expressions* (16) *de x, y, $\gamma z + \varepsilon$ identiques l'une à l'autre.*

En conséquence de la relation (87), nous écrirons :

$$(88) \qquad k^2 \text{ pour } (k^2)' \quad \text{et} \quad k'^2 \text{ pour } (k^2)''' \quad \text{ou bien} \quad k \text{ et } k' \ (k'^2 = 1 - k^2).$$

Nous ferons le calcul pour l'un des deux cas 6, 7. Le calcul pour les cas 1, 12 serait tout à fait semblable.

1° Nous avons

$$\gamma z + \varepsilon = \frac{\tau' \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3} = \frac{\dfrac{\tau'}{\omega_2} \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\dfrac{\omega_1}{\omega_2} \operatorname{sn}^4 u + \operatorname{sn}^2 u + \dfrac{\omega_3}{2}} \qquad (\operatorname{mod} k)$$

$$= \frac{\dfrac{\tau'}{\omega_2} \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\nu' \operatorname{sn}^4 u + \operatorname{sn}^2 u + \sigma'} \qquad (\operatorname{mod} k).$$

puisque ν' et σ' correspondent à $\dfrac{\tau'}{\omega_2}$.

Remplaçons ν', σ' par leurs valeurs (66) et $\dfrac{\tau'}{\omega_2}$ par sa valeur (76); nous aurons

$$\gamma z + \varepsilon = \sqrt{-\gamma \frac{\Delta_2 \Delta_3}{a \Delta_1}} \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{-\dfrac{1}{2} \operatorname{sn}^4 u + \operatorname{sn}^2 u + \dfrac{\gamma}{2a} \dfrac{\Delta_3}{\Delta_1}} \qquad (\operatorname{mod} k);$$

posons maintenant

$$u = vi;$$

il viendra

$$\gamma z + \varepsilon = \sqrt{-\gamma \frac{\Delta_2 \Delta_3}{a^2 \Delta_1}} \frac{\operatorname{sn} vi \operatorname{cn} vi \operatorname{dn} vi}{-\dfrac{1}{2} \operatorname{sn}^4 vi + \operatorname{sn}^2 vi + \dfrac{\gamma}{2a} \dfrac{\Delta_3}{\Delta_1}} \qquad (\operatorname{mod} k)$$

ou (80)

$$\gamma z + \varepsilon = \sqrt{+\gamma \frac{\Delta_2 \Delta_3}{a^2 \Delta_1}} \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{-\dfrac{1}{2} \operatorname{sn}^4 v - \operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn}^2 v + \dfrac{\gamma}{2a} \dfrac{\Delta_3}{\Delta_1} \operatorname{cn}^2 v} \qquad (\operatorname{mod} k')$$

$$= \sqrt{-\gamma \frac{\Delta_2 \Delta_3}{a^2 \Delta_1}} \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\gamma}{2a} \dfrac{\Delta_3}{\Delta_1}\right) \operatorname{sn}^4 v - \left(1 + \dfrac{\gamma}{a} \dfrac{\Delta_3}{\Delta_1}\right) \operatorname{sn}^2 v + \dfrac{\gamma}{2a} \dfrac{\Delta_3}{\Delta_1}} \qquad (\operatorname{mod} k');$$

or (38)

$$1 + \frac{\gamma}{a} \frac{\Delta_3}{\Delta_1} = \frac{a \Delta_1 + \gamma \Delta_3}{a \Delta_1} = \frac{c \Delta_2}{a \Delta_1};$$

donc

$$\gamma z + \varepsilon = \sqrt{\gamma \frac{\Delta_2 \Delta_3}{a^2 \Delta_1}} \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{\dfrac{1}{2} \dfrac{c \Delta_2}{a \Delta_1} \operatorname{sn}^4 v - \dfrac{c \Delta_2}{a \Delta_1} \operatorname{sn}^2 v + \dfrac{\gamma}{2a} \dfrac{\Delta_3}{\Delta_1}} \qquad (\operatorname{mod} k').$$

ou en multipliant les deux termes de la fraction par $-\dfrac{a \Delta_1}{c \Delta_2}$,

$$(89) \qquad \gamma z + \varepsilon = -\sqrt{\gamma \frac{\Delta_1 \Delta_3}{c^2 \Delta_2}} \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{-\dfrac{1}{2} \operatorname{sn}^4 v + \operatorname{sn}^2 v - \dfrac{\gamma}{2c} \dfrac{\Delta_3}{\Delta_2}} \qquad (\operatorname{mod} k').$$

D'autre part, si nous partons de $(k^2)'''$, au lieu de $(k^2)'$, c'est-à-dire (88) de k', nous avons

$$\gamma z + \varepsilon = \frac{\tau''' \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3} = \frac{\dfrac{\tau'''}{\omega_2} \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\dfrac{\omega_1}{\omega_2} \operatorname{sn}^4 u + \operatorname{sn}^2 u + \dfrac{\omega_3}{2}} \qquad [\operatorname{mod}(k)''' \text{ ou } k'],$$

$$= \frac{\dfrac{\tau'''}{\omega^2} \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\nu''' \operatorname{sn}^4 u + \operatorname{sn}^2 u + \sigma'''}$$

ou (78, 73)

$$\gamma z + \varepsilon = \sqrt{\gamma \frac{\Delta_1 \Delta_3}{c^2 \Delta_2}} \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{-\dfrac{1}{2} \operatorname{sn}^4 u + \operatorname{sn}^2 u - \dfrac{1}{2} \dfrac{\gamma}{c} \dfrac{\Delta_3}{\Delta_2}} \qquad (\operatorname{mod} k').$$

Si nous changeons u en $-u$, nous retrouvons l'expression (89) de $\gamma z + \varepsilon$.

2° Nous avons aussi (16), dans les mêmes hypothèses que pour $\gamma z + \varepsilon$,

$$x = \frac{\pi_1 \operatorname{sn}^4 u + \pi_2 \operatorname{sn}^2 u + \pi_3}{\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3} = \frac{\dfrac{\pi_1}{\omega_2} \operatorname{sn}^4 u + \dfrac{\pi_2}{\omega_2} \operatorname{sn}^2 u + \dfrac{\pi_3}{\omega_2}}{\dfrac{\omega_1}{\omega_2} \operatorname{sn}^4 u + \operatorname{sn}^2 u + \dfrac{\omega_3}{\omega_2}}$$

$$= \frac{\dfrac{\pi_1}{\omega_1} \dfrac{\omega_1}{\omega_2} \operatorname{sn}^4 u + \dfrac{\pi_2}{\omega_2} \operatorname{sn}^2 u + \dfrac{\pi_3}{\omega_3} \dfrac{\omega_3}{\omega_2}}{\dfrac{\omega_1}{\omega_2} \operatorname{sn}^4 u + \operatorname{sn}^2 u + \dfrac{\omega_3}{\omega_2}} = \frac{l_1 \nu' \operatorname{sn}^4 u + l_2 \operatorname{sn}^2 u + l_3 \sigma'}{\nu' \operatorname{sn}^4 u + \operatorname{sn}^2 u + \sigma'}$$

$$= \frac{-\dfrac{1}{2} l_1 \operatorname{sn}^4 u + l_2 \operatorname{sn}^2 u + l_3 \dfrac{\gamma}{2a} \dfrac{\Delta_3}{\Delta_1}}{-\dfrac{1}{2} \operatorname{sn}^4 u + \operatorname{sn}^2 u + \dfrac{\gamma}{2a} \dfrac{\Delta_3}{\Delta_1}} \qquad (\operatorname{mod} k).$$

Posons, comme tout à l'heure, $u = vi$; il viendra (80)

$$x = \frac{-\dfrac{1}{2} l_1 \operatorname{sn}^4 vi + l_2 \operatorname{sn}^2 vi + l_3 \dfrac{\gamma}{2a} \dfrac{\Delta_3}{\Delta_1}}{-\dfrac{1}{2} \operatorname{sn}^4 vi + \operatorname{sn}^2 vi + \dfrac{\gamma}{2a} \dfrac{\Delta_3}{\Delta_1}} \qquad (\operatorname{mod} k),$$

$$= \frac{-\dfrac{1}{2} l_1 \operatorname{sn}^4 v - l_2 \operatorname{sn}^2 v (1 - \operatorname{sn}^2 v) + l_3 \dfrac{\gamma}{2a} \dfrac{\Delta_3}{\Delta_1} (1 - 2 \operatorname{sn}^2 v + \operatorname{sn}^4 v)}{-\dfrac{1}{2} \operatorname{sn}^4 v - \operatorname{sn}^2 v (1 - \operatorname{sn}^2 v) + \dfrac{\gamma}{2a} \dfrac{\Delta_3}{\Delta_1} (1 - 2 \operatorname{sn}^2 v + \operatorname{sn}^4 v)} \qquad (\operatorname{mod} k')$$

$$= \frac{\left(-\dfrac{1}{2} l_1 + l_2 + l_3 \dfrac{\gamma}{2a} \dfrac{\Delta_3}{\Delta_1}\right) \operatorname{sn}^4 v - \left(l_2 + l_3 \dfrac{\gamma}{2a} \dfrac{\Delta_3}{\Delta_1}\right) \operatorname{sn}^2 v + l_3 \dfrac{\gamma}{2a} \dfrac{\Delta_3}{\Delta_1}}{\left(\dfrac{\gamma}{2a} \dfrac{\Delta_3}{\Delta_1} + \dfrac{1}{2}\right) \operatorname{sn}^4 v - \left(\dfrac{\gamma}{a} \dfrac{\Delta_3}{\Delta_1} + 1\right) \operatorname{sn}^2 v + \dfrac{\gamma}{2a} \dfrac{\Delta_3}{\Delta_1}} \qquad (\operatorname{mod} k').$$

ou, en remplaçant (38) $1+\frac{\gamma}{a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}$ par $\frac{c\Delta_2}{a\Delta_1}$,

$$x=\frac{\left(\frac{1}{2}l_1-l_2-l_3\frac{\gamma}{2a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right)\frac{a\Delta_1}{c\Delta_2}\operatorname{sn}^2 v+\left(l_2+l_3\frac{\gamma}{a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right)\frac{a\Delta_1}{c\Delta_2}-l_3\frac{\gamma\Delta_3}{2c\Delta_2}}{-\frac{1}{2}\operatorname{sn}^2 u+\operatorname{sn}^2 v-\frac{\gamma\Delta_3}{2c\Delta_2}}\pmod{k'};$$

l_1, l_2, l_3 ont les valeurs indiquées au n° **11**, 1°, comme correspondant à ν', σ'; en particulier

$$l_2=-\frac{d}{a},$$

d'où

$$(90)\quad x=\frac{\left(\frac{1}{2}l_1+\frac{d}{a}-l_3\frac{\gamma}{2a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right)\frac{a\Delta_1}{c\Delta_2}\operatorname{sn}^2 v+\left(-\frac{d}{a}+l_3\frac{\gamma}{a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right)\frac{a\Delta_1}{c\Delta_2}-l_3\frac{\gamma\Delta_3}{2c\Delta_2}}{-\frac{1}{2}\operatorname{sn}^2 u+\operatorname{sn}^2 v-\frac{\gamma\Delta_3}{2c\Delta_2}}\pmod{k'}.$$

D'autre part, en partant de $(k^2)'''$, nous avons (16)

$$x=\frac{\frac{\varpi_1}{\omega_1}\frac{\omega_1}{\omega_2}\operatorname{sn}^2 u+\frac{\varpi_2}{\omega_2}\operatorname{sn}^2 u+\frac{\varpi_3}{\omega_3}\frac{\omega_3}{\omega_2}}{\frac{\omega_1}{\omega_2}\operatorname{sn}^2 u+\operatorname{sn}^2 u+\frac{\omega_3}{\omega_2}}\qquad[\bmod (k)''' \text{ ou } k']$$

ou, puisqu'ici il faut prendre, en correspondance avec $(k^2)'''$ (73),

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\nu'''=-\frac{1}{2},\qquad \frac{\omega_3}{\omega_2}=\sigma'''=-\frac{\gamma}{2c}\frac{\Delta_3}{\Delta_2},$$

$$x=\frac{-\frac{1}{2}l_1\operatorname{sn}^2 u+l_2\operatorname{sn}^2 u-l_3\frac{\gamma}{2c}\frac{\Delta_3}{\Delta_2}}{-\frac{1}{2}\operatorname{sn}^2 u+\operatorname{sn}^2 u-\frac{\gamma}{2c}\frac{\Delta_3}{\Delta_2}}\pmod{k'}.$$

Les quantités l_1, l_2, l_3 ont les valeurs indiquées au n° **11**, 2°, ce qui permet d'écrire, en prenant l'une de celles-ci,

$$(91)\quad x=\frac{-\frac{1}{2}l_1\operatorname{sn}^2 u+\frac{e^2-cdl_3}{c(al_3+d)}\operatorname{sn}^2 u-l_3\frac{\gamma}{2c}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}}{\frac{1}{2}\operatorname{sn}^2 u+\operatorname{sn}^2 u-\frac{\gamma}{2c}\frac{\Delta_3}{\Delta_2}}\pmod{k'}.$$

Il faut montrer l'identité des formules (90, 91).

a. Coefficients de $\mathrm{sn}^4 u$. — Vérifions que (56[1])

$$-\frac{1}{3} l_3 = \left(\frac{1}{2} l_1 + \frac{d}{a} - l_3 \frac{\gamma}{2a} \frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right) \frac{a}{c} \frac{\Delta_1}{\Delta_2}.$$

Le second membre se rapportant à **11**, 1°, on a

$$\frac{1}{2} l_1 + \frac{d}{a} - l_3 \frac{\gamma}{2a} \frac{\Delta_3}{\Delta_1} = \frac{1}{2}\left(-l_3 - \frac{2d}{a}\right) + \frac{d}{a} - l_3 \frac{\gamma}{2a} \frac{\Delta_3}{\Delta_1}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\gamma}{a} \frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right) l_3$$

ou (38)

$$= -\frac{1}{2} \frac{c\Delta_2}{a\Delta_1} l_3.$$

Il faut donc montrer que

$$-\frac{1}{2} l_3 = -\frac{1}{2} \frac{c\Delta_2}{a\Delta_1} l_3 \frac{a\Delta_1}{c\Delta_2},$$

et cela est évident.

b. Coefficients de $\mathrm{sn}^2 u$. — Vérifions que

$$\frac{e^2 - cdl_3}{c(al_3 + d)} = -\frac{d}{a} \frac{a\Delta_1}{c\Delta_2} + \frac{\gamma}{a} \frac{\Delta_3}{\Delta_1} \frac{a\Delta_1}{c\Delta_2} l_3,$$

$$= -\frac{d\Delta_1}{c\Delta_2} + \frac{\gamma\Delta_3}{c\Delta_2} l_3,$$

ou

$$(e^2 - cdl_3) l_3 = (l_3\gamma\Delta_3 - d\Delta_1)(al_3 + d),$$

$$(l_3\gamma\Delta_3 - d\Delta_1)(al_3 + d) - (e^2 - cdl_3)\Delta_2 = 0,$$

$$a\gamma\Delta_3 l_1^2 + d(-a\Delta_1 + \gamma\Delta_3 + c\Delta_2) l_1 - (e^2\Delta_2 + d^2\Delta_1) = 0;$$

on a (38)

$$-a\Delta_1 + \gamma\Delta_3 + c\Delta_2 = 2\gamma\Delta_3$$

et (25)

$$e^2\Delta_2 + d^2\Delta_1 = e^2(-a\varepsilon^2 - \gamma d^2) + d^2(\gamma c^2 - c\varepsilon^2)$$

$$= \varepsilon^2\Delta_3,$$

et il faut, en conséquence, montrer que

$$a\gamma\Delta_3 l_1^2 + 2d\gamma\Delta_3 l_1 - \varepsilon^2\Delta_3 = 0,$$

ou

$$al_1^2 + 2dl_1 - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = 0;$$

or il en est bien ainsi (**11**).

Ainsi, la formule (91) *est identique à la formule* (90).

58. Nous venons d'examiner la combinaison $[(k^2)', (k^2)'']$ du Tableau du n° **57**.

Examinons les autres combinaisons possibles.

1° Nous avons vu (86) que *les combinaisons*

$$[(k^2)', (k^2)''], \quad [(k^2)''', (k^2)^{\text{IV}}]$$

sont inacceptables, c'est-à-dire qu'on ne peut prendre *ensemble* $(k^2)', (k^2)''$, non plus que $(k^2)''', (k^2)^{\text{IV}}$.

2° *Combinaison* $[(k^2)', (k^2)^{\text{IV}}]$. — On a (87)

$$(k^2)''' = 1 - (k^2)';$$

donc (86)

$$\frac{1}{(k^2)^{\text{IV}}} = 1 - (k^2)', \qquad (k^2)^{\text{IV}} = \frac{1}{1 - (k^2)'};$$

si $(k^2)'$ convient, c'est-à-dire si $(k^2)' < 1$, on a

$$(k^2)^{\text{IV}} > 1;$$

la combinaison

$$[(k^2)', (k^2)^{\text{IV}}]$$

est donc inacceptable : on ne peut prendre *ensemble* $(k^2)', (k^2)^{\text{IV}}$.

3° *Combinaison* $[(k^2)'', (k^2)''']$. — Nous avons (87)

$$(k^2)''' = 1 - (k^2)'$$

ou (86)

$$(k^2)''' = 1 - \frac{1}{(k^2)''},$$

$$\frac{1}{(k^2)''} = 1 - (k^2)''';$$

si $(k^2)'''$ convient, c'est-à-dire si

$$0 < (k^2)''' < 1 \qquad \text{ou} \qquad 0 < 1 - (k^2)''' < 1,$$

$(k^2)''$ est plus grand que 1 et ne convient pas. *La combinaison* $[(k^2)'', (k^2)''']$ *est donc encore inacceptable.*

4° *Combinaison* $[(k^2)'', (k^2)^{\text{IV}}]$. — Nous avons (87)

$$(k^2)''' = 1 - (k^2)',$$

d'où (86)

$$\frac{1}{(k^2)^{\text{IV}}} = 1 - \frac{1}{(k^2)''}, \qquad (k^2)^{\text{IV}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{(k^2)''}} = \frac{(k^2)''}{(k^2)'' - 1}.$$

Si $(k^2)''$ convient, $(k^2)'' - 1$ est négatif, donc $(k^2)^{\text{IV}}$ ne convient pas.

La combinaison $[(k^2)'', (k^2)^{\text{IV}}]$, *elle aussi, est inacceptable.*

39. En résumé, *les valeurs* (k^2), $(k^2)''$, $(k^2)'''$, $(k^2)^{\text{IV}}$ *du Tableau du n° 28 ne peuvent conduire qu'à une seule forme*

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{\pi_1 \operatorname{sn}^4 u + \pi_2 \operatorname{sn}^2 u + \pi_3}{\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3}, \qquad y = \frac{\chi_1 \operatorname{sn}^4 u + \chi_2 \operatorname{sn}^2 u + \chi_3}{\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3}, \\ \gamma z + \varepsilon &= \frac{z \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3}, \end{aligned}\right.$$

des coordonnées x, y, z, *mais ce qui a été dit au n° 11 montre que soit* l_1, l_3, *soit* m_1, m_3 $\left(l_1 = \frac{\pi_1}{\omega_1},\ l_3 = \frac{\pi_3}{\omega_3},\ m_1 = \frac{\chi_1}{\omega_1},\ m_3 = \frac{\chi_3}{\omega_3}\right)$ peuvent avoir deux systèmes *de valeurs distinctes.*

Il existe donc toujours deux séries de formules (16), *irréductibles l'une à l'autre, et deux seulement; tous leurs éléments sont réels et s'expriment très simplement en fonction des éléments qui définissent la quartique.*

40. Supposons maintenant que a soit nul (1). Les équations des trois cylindres (C_1), (C_2), (C_3) se réduisent à

$$(92)\quad \left\{\begin{aligned} cy^2 - \gamma z^2 + 2ey - 2\varepsilon z &= 0, \\ \gamma z^2 + 2dx - 2\varepsilon z &= 0, \\ cy^2 + 2dx + 2ey &= 0. \end{aligned}\right.$$

L'équation (92^3) nous donne

$$(93)\qquad x = -cy^2 - 2ey,$$

et nous tirons de (92^1)

$$(94)\qquad z = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + \gamma(cy^2 + 2ey)}}{\gamma},$$

soit

$$Y^2 = \varepsilon^2 + \gamma(cy^2 + 2ey);$$

on sait que Y et y peuvent être mis sous la forme

$$y = \frac{p\,t^2 + q\,t + s}{p''t^2 + q''t + s''}, \qquad Y = \frac{p'\,t^2 + q'\,t + s'}{p''t^2 + q''t + s''}.$$

Il en résulte (93, 94) que la quartique est unicursale.

Chapitre V. — Quartiques φ_1' et φ_1''.

41. Il n'y a que peu de chose à dire des quartiques φ_1''.

Rappelons ceci, qui résume la question de leur représentation paramétrique.

Les équations des quartiques φ_1'', qui correspondent au cas où le discriminant de l'équation en λ du faisceau ponctuel de quadriques a trois racines égales, peuvent être mises sous la forme, les coordonnées étant tétraédriques et le tétraèdre de référence étant réel [1],

$$\begin{cases} a\,y^2 + 2\,x\,t + b\,z^2 + 2\,c\,y\,t = 0, \\ k\,(a\,y^2 + 2\,x\,t) + b\,z^2 + 2\,c\,y\,t = 0. \end{cases}$$

La quartique est donc l'intersection des deux cônes

$$(1) \qquad a\,y^2 + 2\,x\,t = 0, \qquad b\,z^2 + 2\,c\,y\,t = 0.$$

Éliminons t entre les équations (1). Il vient

$$a\,c\,y^3 - b\,x\,z^2 = 0.$$

Si l'on pose

$$y = p\,z,$$

on a

$$x = \frac{ac}{b}\,p^3 z,$$

d'où

$$\frac{x}{2\,a^2 c\,p^3} = \frac{y}{2\,b\,c\,p^2} = \frac{z}{2\,b\,c\,p} = \frac{t}{-b^2}.$$

Réciproquement, un système de la forme

$$(2) \qquad \frac{x}{a'p^3} = \frac{y}{b'p^2} = \frac{z}{c'p} = t$$

[1] Painvin, *loc. cit.* — *Voir* aussi R. de Montessus de Ballore, *Introduction*, etc., *loc. cit.*

représente une quartique de l'espèce $\gamma_1^{\prime}$. En effet, ces relations peuvent être écrites

$$x = a'\mu^2, \qquad y = b'\mu^2 t, \qquad z = c'\mu t;$$

éliminons μ entre les équations

$$x = a'\mu^2 t \qquad \text{et} \qquad y^2 = b'^2\mu^4 t^2,$$

d'une part, et entre

$$y = b'\mu^2 t \qquad \text{et} \qquad z^2 = c'^2\mu^2 t^2,$$

d'autre part; cela donne

$$a'y^2 - b'^2 xt = 0, \qquad b'z^2 - c'^2 yt = 0,$$

qui sont les équations tétraédriques de la quartique (2).

L'équation du faisceau ponctuel de quadriques défini par ces deux cônes,

$$a'y^2 + \lambda b'z^2 - b'^2 xt - \lambda c'^2 yt = 0,$$

a pour discriminant

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -\dfrac{b'^2}{2} \\ 0 & a' & 0 & -\dfrac{\lambda c'^2}{2} \\ 0 & 0 & \lambda b' & 0 \\ -\dfrac{b'^2}{2} & -\dfrac{\lambda c'^2}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{a'b'^2}{4}\lambda,$$

et trois racines sont infinies, donc égales.

42. *Passons aux quartiques* γ_1'. — Il est bien connu que ces courbes, qui correspondent au cas où le discriminant de l'équation en λ a deux racines égales, elles aussi, sont unicursales. Mais *nous allons montrer*, en précisant leurs représentations paramétriques, *qu'elles se divisent en deux sous-groupes, irréductibles l'un à l'autre*, ce qui n'a pas encore été remarqué.

Les quartiques γ_1' sont représentées, en coordonnées tétraédriques, par deux équations de la forme [1]

$$(3) \qquad y^2 = et^2 + fxt, \qquad z^2 = gt^2 + hxt;$$

---

[1] *Cf.* la note du n° **41**.

posons

$$(4^1) \qquad t = \alpha z;$$

l'équation (2^2) devient

$$z = g\alpha^2 z + h\alpha x,$$

d'où

$$(4^2) \qquad x = \frac{1 - g\alpha^2}{h\alpha} z;$$

l'équation (3^1) peut être écrite, en remplaçant x et t par leurs valeurs (4),

$$y^2 = \left(e\alpha^2 + f\frac{1 - g\alpha^2}{h}\right) z^2;$$

on a ainsi

$$(5^1) \qquad \frac{x}{1 - g\alpha^2} = \frac{y}{\alpha\sqrt{h}\sqrt{(eh - fg)\alpha^2 + f}} = \frac{z}{h\alpha} = \frac{t}{h\alpha^2}.$$

Réciproquement, un système d'équations de la forme

$$(5^2) \qquad \frac{x}{a + b\alpha^2} = \frac{y}{\alpha\sqrt{c\alpha^2 + d}} = \frac{z}{e\alpha} = \frac{t}{f\alpha^2},$$

où α est un paramètre variable, représente une quartique φ_4.

Égalons en effet ces rapports à une quantité μ; on aura

$$(6) \qquad \begin{cases} x = \mu(a + b\alpha^2), & y^2 = \mu^2\alpha^2(c\alpha^2 + d), \\ z = \mu e\alpha, & t = \mu f\alpha^2, \end{cases}$$

ce qu'on peut écrire

$$\begin{cases} fx = \mu fa + \mu fb\alpha^2, & f^2y^2 = \mu f\alpha^2(\mu fc\alpha^2 + \mu fd), \\ fz^2 = f\mu^2 e^2\alpha^2 \end{cases}$$

ou (6^1)

$$(7) \qquad fx = \mu fa + bt, \qquad fz^2 = e^2\mu t, \qquad f^2y^2 = t(ct + \mu fd);$$

le paramètre α est ainsi éliminé.

Pour éliminer μ, il suffit de multiplier la première équation (7) par e^2t, la deuxième par e^2, et de remplacer $e^2\mu t$ par fz^2; on a ainsi

$$\begin{aligned} e^2fxt &= \mu fae^2t + be^2t^2 = af^2z^2 + be^2t^2, \\ e^2f^2y^2 &= ce^2t^2 + \mu fde^2t = ce^2t^2 + df^2z^2; \end{aligned}$$

les équations de la quartique sont donc

$$(8)\qquad af^2z^2+be^2t^2-e^2fxt=0,\qquad -e^2f^2y^2+df^2z^2+ce^2t^2=0.$$

Formons l'équation en λ.

$$-\lambda e^2f^2y^2+(a+d\lambda)f^2z^2+(b+c\lambda)e^2t^2-e^2fxt=0;$$

son discriminant

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -e^2f \\ 0 & -\lambda e^2f^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a+d\lambda)f^2 & 0 \\ -e^2f & 0 & 0 & (b+c\lambda)e^2 \end{vmatrix} = e^6f^6\lambda(a+d\lambda)$$

a deux racines λ infinies, donc deux racines égales. La quartique est donc bien de l'espèce φ_1.

Les équations (5^2) *se prêtent particulièrement bien à la description des quartiques* φ_1.

45. Revenons au système (5^2). Nous allons le rendre rationnel. Posons à cet effet

$$(10)\qquad u^2=cz^2+d,$$

et soient z_0, u_0 les coordonnées d'un point de la courbe plane (10), de telle sorte que

$$u_0^2=cz_0^2+d;$$

on a

$$(11)\qquad u^2-u_0^2=c(z^2-z_0^2).$$

Introduisons un nouveau paramètre β, défini par

$$(12)\qquad u-u_0=\beta(z-z_0),$$

ce qui permet d'écrire (11)

$$(13)\qquad \begin{aligned}(u+u_0)\beta(z-z_0)&=c(z^2-z_0^2),\\ \beta(u-u_0)&=c(z+z_0),\end{aligned}$$

d'où (12, 13)

$$u=\beta z-u_0+\beta z_0,\qquad \beta u=cz+\beta u_0-cz_0;$$

on en tire

$$u = \frac{u_0\beta^2 + 2c\alpha_0\beta - cu_0}{\beta^2 - c}, \qquad \alpha = \frac{\alpha_0\beta^2 - 2u_0\beta + c\alpha_0}{\beta^2 - c},$$

et les formules (5²) deviennent, β étant un paramètre variable,

$$\frac{x}{a(\beta^2 - c)^2 + b(\alpha_0\beta^2 - 2u_0\beta + c\alpha_0)^2}$$
$$= \frac{y}{(\alpha_0\beta^2 - 2u_0\beta - c\alpha_0)(-u_0\beta^2 + 2c\alpha_0\beta - cu_0)}$$
$$= \frac{z}{f(\alpha_0\beta^2 - 2u_0\beta + c\alpha_0)^2} = \frac{t}{f(\alpha_0\beta^2 - 2u_0\beta + c\alpha_0)^2}.$$

14. *Représentation paramétrique des quartiques φ_i au moyen des fonctions circulaires.* — Les équations (3) sont une réduction, immédiate d'ailleurs, des équations suivantes obtenues par Painvin [1]:

$$(14) \qquad by^2 + cz^2 + dt^2 + 2xt = 0, \qquad b_1y^2 + c_1z^2 + d_1t^2 + 2xt = 0,$$

qui donnent, par élimination de $2xt$,

$$(b - b_1)y^2 + (c - c_1)z^2 + (d - d_1)t^2 = 0,$$

ou

$$(15) \qquad \frac{b - b_1}{d_1 - d}y^2 + \frac{c - c_1}{d_1 - d}z^2 - t^2 = 0.$$

Premier cas :

$$\frac{b - b_1}{d_1 - d} > 0, \qquad \frac{c - c_1}{d_1 - d} > 0.$$

Nous pouvons poser

$$y = \sqrt{\frac{d_1 - d}{b - b_1}}\, t \sin\varphi, \qquad z = \sqrt{\frac{d_1 - d}{c - c_1}}\, t \cos\varphi,$$

et la première équation (14) devient

$$b\frac{d_1 - d}{b - b_1}t\sin^2\varphi + c\frac{d_1 - d}{c - c_1}t\cos^2\varphi + dt + 2x = 0,$$

---

[1] Painvin, *loc. cit.*

ce qui conduit au système d'équations

$$\frac{x}{-\frac{1}{2}\left(b\frac{d_1-d}{b-b_1}\sin^2\varphi+c\frac{d_1-d}{c-c_1}\cos^2\varphi+d\right)}$$

$$=\frac{y}{\sqrt{\frac{d_1-d}{b-b_1}}\sin\varphi}=\frac{z}{\sqrt{\frac{d_1-d}{c-c_1}}\cos\varphi}=t,$$

qui se trouve être de la forme

$$\frac{x}{\lambda\sin^2\varphi+\mu}=\frac{y}{\nu\sin\varphi}=\frac{z}{\rho\cos\varphi}=t. \tag{16}$$

On voit sans peine, et cela est *important*, que tout système de la forme (16) représente une quartique de l'espèce φ_1. En effet, nous en tirons

$$\sin\varphi=\frac{y}{\nu t},\qquad \cos\varphi=\frac{z}{\rho t},\qquad x=(\lambda\sin^2\varphi+\mu)t; \tag{17}$$

éliminons φ entre les équations (17^1, 17^3) et (17^2, 17^3); il vient

$$\lambda y^2+\mu\nu t^2=\nu^2 xt,\qquad (\lambda+\mu)\rho^2t^2-\lambda z^2=\rho^2xt,$$

équation (1) de la forme (3).

Deuxième cas. — Revenons à l'équation (15) et supposons que les coefficients de y^2, z^2 soient de signes contraires : la réalité de la courbe empêche qu'ils soient tous deux négatifs. Soit, par exemple,

$$\frac{b-b_1}{d_1-d}>0,\qquad \frac{c-c_1}{d_1-d}<0.$$

Écrivons l'équation (15), en mettant les signes en évidence,

$$\frac{b-b_1}{d_1-d}y^2-\frac{c_1-c}{d_1-d}z^2-t^2=0$$

ou

$$\frac{c_1-c}{d_1-d}z^2+t^2=\frac{b-b_1}{d_1-d}y^2,$$

ou encore

$$\frac{c_1-c}{d_1-d}\,\frac{d_1-d}{b-b_1}z^2+\frac{d_1-d}{b-b_1}t^2=y^2,$$

ou encore, en remarquant que le coefficient de y^2 est et va rester

positif,

$$\frac{c_1 - c}{b - b_1} z^2 + \frac{d_1 - d}{b_1 - b} t^2 = y^2;$$

nous pouvons poser

$$\sqrt{\frac{c_1 - c}{b - b_1}}\, z = y \sin\varphi, \qquad \sqrt{\frac{d_1 - d}{b - b_1}}\, t = y \cos\varphi,$$

ou

$$(18) \qquad z = y\sqrt{\frac{b - b_1}{c_1 - c}} \sin\varphi, \qquad t = y\sqrt{\frac{b - b_1}{d_1 - d}} \cos\varphi,$$

et l'équation (14') devient

$$(19) \quad by + cy\frac{b - b_1}{c_1 - c}\sin^2\varphi + dy\frac{b - b_1}{d_1 - d}\cos^2\varphi - 2x\sqrt{\frac{b - b_1}{d_1 - d}}\cos\varphi = 0.$$

On conclut de (18, 19)

$$\frac{x}{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{d_1 - d}{b - b_1}}\left(c\frac{b - b_1}{c_1 - c}\sin^2\varphi + d\frac{b - b_1}{d_1 - d}\cos^2\varphi - b\right)}$$

$$= \frac{y}{\cos\varphi} = \frac{z}{\sqrt{\frac{b - b_1}{c_1 - c}}\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{t}{\sqrt{\frac{b - b_1}{d_1 - d}}\cos^2\varphi}.$$

Réciproquement, tout système d'équations de la forme

$$(20) \qquad \frac{x}{\lambda\cos^2\varphi + \mu} = \frac{y}{\nu\cos\varphi} = \frac{z}{\rho\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{t}{\pi\cos^2\varphi}$$

représente une quartique φ_1.

En effet, ces équations donnent

$$(21) \qquad \sin\varphi = \frac{\nu}{\rho}\frac{z}{y}, \qquad \cos\varphi = \frac{\nu}{\pi}\frac{t}{y},$$

d'où l'équation d'une première quadrique contenant la quartique

$$(22) \qquad S = y^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} z^2 - \frac{\nu^2}{\pi^2} t^2 = 0.$$

Nous avons ensuite

$$\nu x\cos\varphi - (\lambda\cos^2\varphi + \mu)y = 0,$$

ou (21)

$$\frac{\nu^2}{\pi}\frac{tx}{y} - \left(\frac{\lambda\nu^2}{\pi^2}\frac{t^2}{y^2} + \mu\right)y = 0.$$

ce qui conduit à l'équation d'une seconde quadrique, contenant encore la quartique

$$T = \frac{\nu^2}{\pi} t x - \frac{\lambda^2 \nu^2}{\pi^2} t^2 - \mu y^2 = 0;$$

T est de la forme (3^1); $bS + T$ est de la forme (3^2) : la quartique est donc bien de l'espèce φ_1'. M. A. Vogt [1] a mis sous une forme élégante les équations paramétriques des quartiques de ce sous-groupe, en posant

$$y = \sqrt{\frac{d_1 - d}{b - b_1}}\, t . \operatorname{sh}\varphi, \qquad z = \sqrt{\frac{d_1 - d}{c_1 - c}}\, t . \operatorname{ch}\varphi;$$

la première équation (14) devient

$$b \frac{d_1 - d}{b - b_1} t . \operatorname{sh}^2\varphi + c \frac{d_1 - d}{c_1 - c} t . \operatorname{ch}^2\varphi + dt - 2x = 0,$$

d'où le système

$$\frac{y}{\sqrt{\frac{d_1 - d}{b - b_1}} \operatorname{sh}\varphi} = \frac{z}{\sqrt{\frac{d_1 - d}{c_1 - c}} \operatorname{ch}\varphi}$$
$$= \frac{x}{-\frac{1}{2}\left[b \frac{d_1 - d}{b - b_1} \operatorname{sh}^2\varphi + c \frac{d_1 - d}{c_1 - c} \operatorname{ch}^2\varphi + d\right]} = t;$$

la quartique est ainsi représentée par un système de la forme

$$(23) \qquad \frac{x}{\nu \operatorname{sh}^2\varphi + \mu} = \frac{y}{\nu \operatorname{sh}\varphi} = \frac{z}{\rho \operatorname{ch}\varphi} = t,$$

qui offre une analogie remarquable avec le système (16).

Les équations (16, 20) *définissent deux sous-groupes de quartiques* φ_1 *irréductibles l'un à l'autre.*

Chapitre VI. — Résumé. — Classification.

43. *Les notations* φ_1'', φ_1, φ_1 *paraissent être insuffisantes. On pourrait adopter celles que nous allons indiquer, en désignant par*

---

[1] R. de Montessus de Ballore, *Introduction, etc.* (*loc. cit.*), note, p. 122.

la lettre φ *une quartique quelconque de première espèce* (*et par la lettre* ψ *une quartique quelconque de deuxième espèce*).

1. φ_1^4. — Le discriminant de l'équation en λ a ses quatre racines réelles et distinctes et les quatre cônes du faisceau ponctuel de quadriques sont réels, particularité que rappelle l'indice 4. Les quartiques sont de genre 1.

Représentation paramétrique en coordonnées tétraédriques :

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu \operatorname{sn} u} = \frac{z}{\nu \operatorname{cn} u} = \frac{t}{\operatorname{dn} u},$$

les éléments λ, μ, ν, k^2 sont réels et arbitraires.

2. φ_1^2. — Le discriminant a deux racines réelles distinctes et deux racines imaginaires; deux cônes réels, deux cônes imaginaires, particularité que rappelle l'indice 2. Les quartiques sont de genre 1.

Représentation paramétrique :

$$\frac{x}{\lambda \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u} = \frac{y}{\mu \operatorname{cn} u} = \frac{z}{\omega \operatorname{cn}^2 u + \theta} = \frac{t}{\operatorname{cn} u - \omega\theta}, \qquad k^2 = \frac{1}{1+\theta^2},$$

les éléments λ, μ, ω, θ sont réels et arbitraires.

3. φ_1^0. — Le discriminant a ses quatre racines imaginaires; les quatre cônes sont imaginaires, particularité que rappelle l'indice 0. Les quartiques sont de genre 1.

Représentations paramétriques :

1° $$\frac{x}{p(1-i)\operatorname{sn} u + q(1+i)\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}$$
$$= \frac{y}{p(1+i)\operatorname{sn} u + q(1-i)\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u} = \frac{z}{r \operatorname{sn}^2 u + s} = \frac{t}{m \operatorname{sn}^2 u + n};$$

θ, k sont déterminés par les équations $(0 < k^2 < 1)$

$$\begin{cases} (-b+ie)\theta^2 + 2(d-ih)\theta + b - ie = 0, \\ (ed-bh)k^2 - (b^2+e^2+d^2+h^2)k + ed - bh = 0; \end{cases}$$

$\frac{p^2}{n^2}, \frac{q^2}{n^2}, \frac{r^2}{n^2}, \frac{m}{n}, \frac{s}{n}$ le sont à leur tour comme il suit :

$$\left\{\begin{array}{lll} \frac{p^2}{n^2} = -\frac{1}{2}\frac{(b-ie)^2+(d-ih)^2}{b-ie}\theta k, & & \frac{q^2}{n^2} = \frac{1}{2}\frac{ed-bh}{b-ie}\theta, \\ \frac{r^2}{n^2} = -k^2, & \frac{m}{n} = i\theta k, & \frac{s}{n} = -\theta; \end{array}\right.$$

2° $$\frac{x}{p(1-i)\,\mathrm{dn}\,u + q(1+i)\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}$$
$$= \frac{y}{p(1+i)\,\mathrm{dn}\,u + q(1-i)\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u} = \frac{z}{r\,\mathrm{dn}^2 u + s} = \frac{t}{m\,\mathrm{dn}^2 u + n},$$

où θ, k' sont déterminés par les équations $(0 < k'^2 < 1)$,

$$\left\{\begin{array}{l} (-b+ie)\theta^2 + 2(d-ih)\theta + b - ie = 0, \\ (ed-bh)k'^2 - (b^2+e^2+d^2+h^2)k' + ed - bh = 0; \end{array}\right.$$

$\frac{p^2}{n^2}, \frac{q^2}{n^2}, \frac{r^2}{n^2}, \frac{m}{n}, \frac{s}{n}$ le sont par

$$\left\{\begin{array}{lll} \frac{p^2}{n^2} = \frac{1}{2}\frac{(b-ie)^2+(d-ih)^2}{b-ie}\frac{\theta}{k}, & & \frac{q^2}{n^2} = -\frac{1}{2}\frac{k^2}{k'^2}\frac{ed-bh}{b-ie}\theta, \\ \frac{r^2}{n^2} = -\frac{1}{k'^2}, & \frac{m}{n} = \frac{i\theta}{k'}, & \frac{s}{n} = -\theta; \end{array}\right.$$

b, d, e, h sont arbitraires.

4. φ'_1. — Courbes de genre 1, communes à trois cylindres réels. Représentation paramétrique (coordonnées cartésiennes) :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{\pi_1\,\mathrm{sn}^2 u + \pi_2\,\mathrm{sn}^2 u + \pi_3}{\omega_1\,\mathrm{sn}^2 u + \omega_2\,\mathrm{sn}^2 u + \omega_3}, \qquad y = \frac{\chi_1\,\mathrm{sn}^2 u + \chi_2\,\mathrm{sn}^2 u + \chi_3}{\omega_1\,\mathrm{sn}^2 u + \omega_2\,\mathrm{sn}^2 u + \omega_3}, \\ \lambda z + \varepsilon = \frac{\tau\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\omega_1\,\mathrm{sn}^2 u + \omega_2\,\mathrm{sn}^2 u + \omega_3}; \end{array}\right.$$

les quantités

$$\frac{\pi_1}{\omega_2}, \frac{\pi_2}{\omega_2}, \frac{\pi_3}{\omega_2}, \frac{\chi_1}{\omega_2}, \frac{\chi_2}{\omega_2}, \frac{\chi_3}{\omega_2}, \frac{\omega_1}{\omega_2}, \frac{\omega_3}{\omega_2}, \frac{\tau}{\omega_2}, k^2 \qquad (0 < k^2 < 1)$$

s'expriment très simplement, et par des relations réelles, au moyen de six paramètres arbitraires $a, c, d, e, \gamma, \varepsilon$ (n^{os} **20** à **40**).

La représentation qu'on vient d'indiquer est susceptible de deux formes complètement distinctes l'une de l'autre, représentant l'une et l'autre la même quartique.

5. $\mathfrak{T}_0^1$. — Courbes de genre o, ayant un point de rebroussement. Représentation paramétrique en coordonnées tétraédriques :

$$\frac{x}{a\mu^2} = \frac{y}{b\mu^2} = \frac{z}{c\mu} = t,$$

a, b, μ quelconques.

6. $\mathfrak{T}_0^2$. — Courbes de genre o, ayant un point double. Représentations paramétriques :

1° $$\frac{x}{a + b\alpha^2} = \frac{y}{\alpha\sqrt{c\alpha^2 + d}} = \frac{z}{e\alpha} = \frac{t}{f\alpha^2},$$

a, b, c, d, e, f arbitraires;

2° $$\frac{x}{a(\beta^2 - c) + b(\alpha_0\beta^2 - 2u_0\beta + c\alpha_0)^2}$$
$$= \frac{y}{(\alpha_0\beta^2 - 2u_0\beta + c\alpha_0)(-u_0\beta^2 + 2\alpha_0\beta - cu_0)}$$
$$= \frac{z}{f(\alpha_0\beta^2 - 2u_0\beta + c\alpha_0)^2} = \frac{t}{f(\alpha_0\beta^2 - 2u_0\beta + c\alpha_0)^2},$$

a, b, c, f arbitraires, α_0 et u_0 liés par une relation

$$u_0^2 = c\alpha_0^2 + d,$$

où c et d sont arbitraires.

3° Ces quartiques comprennent deux sous-groupes :

A. *Sous-groupe* $\mathfrak{T}_0^{21}$; représentation paramétrique :

$$\frac{x}{\lambda\sin^2\mu + \rho} = \frac{y}{\nu\sin\varphi} = \frac{z}{\rho\cos\varphi} = t$$
(λ, μ, ν, ρ arbitraires);

B. *Sous-groupe* $\mathfrak{T}_0^{22}$; représentation paramétrique :

$$\frac{x}{\lambda\,\mathrm{sh}^2\varphi + \mu} = \frac{y}{\nu\,\mathrm{sh}\,\varphi} = \frac{z}{\rho\,\mathrm{ch}\,\varphi} = t$$
(λ, μ, ν, ρ arbitraires).

7. $\mathfrak{T}_{10}^1$. — Courbes de genre o, par lesquelles passent trois cylindres; les quartiques $\mathfrak{T}_{10}^1$, $\mathfrak{T}_{10}^2$ ne possèdent pas cette propriété.

TABLE DES MATIÈRES.

(*Les indications se rapportent aux numéros du texte et non aux pages.*)

Introduction. — Références bibliographiques. Nos

I. Quartiques φ_{τ}^{1} (φ_{τ}^{1} de la notation du n° 44).. 1
II. Quartiques φ_{τ}^{2} (φ_{τ}^{2} de la notation du n° 44)..... 4
III. Quartiques φ_{τ}^{3} (φ_{1}^{0} de la notation du n° 44)..... 11
IV. Quartiques φ_{1}' (notation du n° 44)..... 20
V. Quartiques φ_{τ}'' et φ_{1}' ($\varphi_{\tau 0}^{1}$, $\varphi_{\tau 0}^{31}$, $\varphi_{\tau 0}^{22}$, $\varphi_{\tau 0}^{3}$ de la notation du n° 44)..... 41
VI. Résumé et classification nouvelle..... 45

ERRATA

(*Journal de Mathématiques*, 1916).

Page.	Ligne	*Au lieu de :*	*Lire :*
205	10	*ont un*	*ont chacune un*
205	11	*ordre;*	*ordre avec* ξ;
208	21	concerne z	concerne χ.
209	3	$(x - \alpha)$	$(x - a)$
211	4	ou se trouve ψ.	où se trouve x, y.
211	9	$2\tau_1$	$2\tau_1\xi$
214	18	$\xi_1(y - b)$	$\alpha_1(y - b)$
217	25	(x, z)	(x, y)
222	8	ξ, χ	ψ, χ
224	18	$\gamma_{21}(x - \lambda)^2$	$\gamma_{21}(x - \alpha)^2$
224	3 en rem.	$A_2B_1 - A_2B_3$	$A_2B_1 - A_1B_2$
224	4 en rem.	$A_2B_3 - B_1A_3$	$A_2B_3 - B_2A_3$
224	6 en rem.	b_2	B_2
225	6, 7, 10	$A_2B_3 - B_1A_3$	$A_2B_3 - B_2A_3$
227	2	$H[a(t), b(t)], \psi[a(t), b(t)]$	$H[a(t), b(t)] \times \psi[a(t), b(t)]$
228	6	χ	ψ
228	23	$-\lambda(x, y)]\xi$.	$-\lambda(x, y)\psi]\xi$.
229	19	$(x - \alpha_2)^{(p_2-1)(q_2-1)}$	$(x - \alpha_2)^{(p_2-1)(q_2-1)}$
232	1	Ces	Les
232	4 et 6 en rem.	$= \ldots =$	$\ldots =$
232	5 en rem.	$-\lambda(x, y)]\xi$.	$-\lambda(x, y)\psi]\xi$.
236	15	$q_1'' \quad q_2'' \quad \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2$	$r_1'' \quad r_2'' \quad r_1 \quad r_2$
237	4 et 5	$q_1'' \quad q_2''$	$r_1'' \quad r_2''$
237	12	q_1''	r_1''
237	19	Q	P
238	7 et 13	$(x - \varepsilon_2)^{q_2}\psi Q_1$	$(x - \varepsilon_2)^{q_2} \ldots \psi Q_1$
239	5 en rem.	p_1'''	p_1''
241	4 en rem.	(II, III)	(I, II)
241	11	$(Q_1 x_1 y)$	$Q_1(x, y)$

Sur un cas particulier de diffraction des images des astres circulaires;

PAR MAURICE HAMY.

Des considérations particulières m'ont conduit à penser qu'il y aurait avantage, pour mesurer le diamètre mal connu du Soleil et en étudier les variations, à observer l'astre au foyer d'une lunette dont l'objectif est recouvert d'un écran opaque, percé d'une fente de grande longueur.

L'interposition d'un pareil diaphragme, dans le trajet des rayons, a pour effet de provoquer une dilatation de l'image, dans le sens parallèle à la largeur de la fente, et l'étude de cette déformation ne présente pas d'intérêt spécial. Les choses se passent, au contraire, tout autrement dans la direction parallèle au sens de la longueur de la fente.

La largeur angulaire de l'image, considérée au niveau de son centre, présente alors un rapport direct avec le diamètre de l'astre.

L'examen théorique du sujet est intimement lié à la solution du problème suivant :

Un astre circulaire, de diamètre 2ε, *étant observé au foyer d'une lunette diaphragmée par une fente rectiligne, trouver les variations de l'intensité lumineuse, le long de l'axe de symétrie de l'image parallèle au grand côté* h *de la fente, dans une direction faisant l'angle* φ *avec la droite allant de l'observateur au centre de l'astre.*

Dans mes recherches sur cette question, j'ai supposé l'éclat intrinsèque de l'astre uniforme, sa variation, du centre au bord, n'exerçant qu'une influence négligeable sur les conclusions. J'examine, dans le présent Mémoire, le cas limite correspondant à une fente de largeur très faible.

Le problème, considéré sans faire cette restriction, est beaucoup plus complexe. Son étude fera l'objet d'un autre travail.

L'application de mes résultats au Soleil complète la théorie.

Considérant l'image de cet astre, telle qu'elle se présente, dans le champ d'une lunette, je montre notamment que le contraste lumineux, de part et d'autre du bord géométrique, à l'une ou l'autre extrémité de l'axe de symétrie parallèle à la fente, est plus marqué en diaphragmant l'objectif par une fente étroite, de longueur égale à son ouverture, qu'en utilisant toute sa surface.

I.

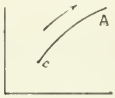
Le présent travail est fondé sur certains résultats établis, dans mon Mémoire sur l'approximation des fonctions de grands nombres [1], concernant les intégrales de la forme $\int f(u)\varphi^n(u)du$, n désignant un nombre positif élevé. Je ne puis me dispenser de les résumer très succinctement ici, et d'en déduire dès maintenant les formules immédiatement applicables à la question à étudier.

1° Considérons l'intégrale

$$(1)\qquad J = \int f(u)\varphi^n(u)\,du,$$

prise le long d'un contour cA et supposons que $|\varphi(u)|$ prenne sa plus grande valeur, le long de ce chemin, à l'extrémité $u = c$.

Fig. 1.



Dans ces conditions, si $\varphi(u)$ est holomorphe, dans le voisinage de c, sans que $\varphi'(c)$ soit nul, et si l'on a, dans le voisinage du même point,

$$(2)\qquad f(u) = (u-c)^\beta[B_1 + B_2(u-c) + \ldots] \qquad (\beta > -1),$$

on a pour n positif et très grand :

$$(3)\quad J = \left(-\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^{\beta+1}\varphi^n\frac{\Gamma(\beta+1)}{n^{\beta+1}}\left\{B_1 + \frac{\beta+1}{n}\left[\frac{\beta+2}{2}\left(\frac{\varphi\varphi''}{\varphi'^2}-1\right)B_1 - \frac{\varphi}{\varphi'}B_2\right] + \ldots\right\},$$

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1908.

les termes négligés, dans la grande parenthèse, étant tels que leur produit par u^2 reste fini, lorsque u augmente indéfiniment; φ, φ', φ'', ... représentant d'ailleurs $\varphi(c)$, $\varphi'(c)$, $\varphi''(c)$, ... et $\Gamma(\beta+1)$ la fonction eulérienne de seconde espèce.

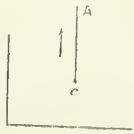
Si l'on suppose que la détermination du facteur $(u-c)^\beta$ qui figure, dans le développement de $f(u)$, correspond au plus petit argument positif de $u-c$, et si l'on appelle Θ le plus petit angle positif que fait, avec la direction positive de l'axe des abscisses, la demi-tangente au contour d'intégration, menée au point $u=c$, dans le sens cA, la détermination du facteur $\left(-\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^{\beta+1}$ qui rentre dans l'expression de J est celle qui correspond à l'argument de $\left(-\frac{\varphi}{\varphi'}\right)$ qui diffère le moins de Θ. Ce que je viens de dire suppose essentiellement que l'intégration se fasse dans le sens cA. Dans le cas contraire, il faut changer le signe du second nombre.

Applications. — L'expression générale ci-dessus s'applique au cas où l'on a (E base des logarithmes népériens)

$$(1) \qquad J = \int f(u)\, E^{nu\sqrt{-1}}\, du,$$

l'intégrale étant prise le long d'une perpendiculaire à l'axe des abscisses (*fig.* 2) partant du point $u=c$, et dirigée dans le sens des ordonnées

Fig. 2.



positives. $|E^{u\sqrt{-1}}|$ va, en effet, constamment en décroissant, quand on s'éloigne du point c sur ce chemin.

Dans le cas actuel,

$$-\frac{\varphi}{\varphi'} = \sqrt{-1} \qquad \text{et} \qquad \Theta = \frac{\pi}{2}.$$

On doit donc poser

$$-\frac{\varphi}{\varphi'} = E^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$$

et il en résulte

$$(5)\qquad J = E^{\beta+1\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}\, E^{nc\sqrt{-1}}\,\frac{\Gamma(\beta+1)}{n^{\beta+1}}\left[B_1 + \sqrt{-1}\,\frac{\beta+1}{n}\,B_2 + \ldots\right],$$

les coefficients B_1, B_2, du développement de $f(u)$, étant calculés de façon que l'argument de $u - c$ choisi soit le plus petit argument positif.

D'ailleurs, quand $f(u)$ se réduit à une constante B_0, on a exactement

$$J = \frac{B_0}{n}\, E^{\left(\frac{\pi}{2}+nc\right)\sqrt{-1}}.$$

Voici une autre application de la formule générale

Supposons maintenant

$$(6)\qquad J = \int f(u)\, E^{\,nu\sqrt{-1}}\, du,$$

l'intégrale étant prise le long d'une perpendiculaire à l'axe des abscisses,

Fig. 3.

partant du point $u = c$ et dirigée dans le sens des ordonnées négatives (*fig.* 3).

Les coefficients du développement de $f(u)$, dans le voisinage de $u = c$, étant calculés de façon à correspondre au plus petit argument positif de $u - c$, on trouve, en remarquant que Θ est ici égal à $\frac{3\pi}{2}$,

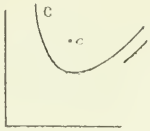
$$(7)\qquad J = E^{\beta+1\frac{3\pi}{2}\sqrt{-1}}\, E^{\,nc\sqrt{-1}}\,\frac{\Gamma(\beta+1)}{n^{\beta+1}}\left[B_1 - \sqrt{-1}\,\frac{\beta+1}{n}\,B_2 + \ldots\right].$$

Dans le cas où $f(u)$ se réduit à une constante B_0, on a exactement

$$J = \frac{B_0}{n}\, E^{\left[\frac{3\pi}{2}-nc\right]\sqrt{-1}}.$$

2° Les formules (3), (5) et (7) ne s'appliquent plus lorsque le point $u = c$ n'est pas sur le contour d'intégration C. Dans cette hypothèse, la considération d'un point $u = c$, dans le voisinage duquel la

Fig. 4.

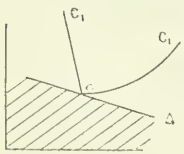


fonction $f(u)$ est développable par la formule (2), est susceptible de conduire à une expression approchée de J, sous les conditions que nous allons spécifier. L'exposant β peut alors recevoir une valeur quelconque, à l'exception d'une valeur entière positive.

Voici d'abord une propriété de toute fonction $\varphi(u)$, holomorphe dans le voisinage du point c, et applicable seulement lorsque $\varphi(c)$ et $\varphi'(c)$ ne sont pas nuls. Par le point c, on peut faire passer une droite Δ telle que $|\varphi(u)| > |\varphi(c)|$, pour les points situés d'un côté de Δ et suffisamment voisins de c, et $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$ pour les points situés de l'autre côté de Δ.

Imaginons maintenant qu'il existe un contour C_1 (*fig.* 5), passant

Fig. 5.



par c et jouissant des propriétés suivantes : 1° ce contour serait équivalent au contour C, si le point $u = c$ n'était pas un point singulier de $f(u)$; 2° la plus grande valeur de $|\varphi(u)|$ le long du contour C_1 correspond à la valeur $u = c$.

Si, pour rendre le contour C_1 équivalent au contour C, il faut le déformer, dans le voisinage du point $u = c$, de façon à le faire pénétrer dans la région du plan, couverte de hachures, contenant les points pour lesquels $|\varphi(u)| > |\varphi(c)|$, la considération du point singulier $u = c$ conduit à la valeur asymptotique de l'intégrale (1) et l'on a, pour u

très grand,

$$(8)\qquad J = \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\Gamma(-\beta)}\left(\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^{\beta+1}\frac{\varphi^n}{n^{1+\beta}}\left\{B_1 + \frac{\beta+1}{n}\left[\frac{\beta+2}{2}\left(\frac{\varphi\varphi''}{\varphi'^2}-1\right)B_1 - \frac{\varphi}{\varphi'}B_2\right] + \ldots\right\},$$

le produit par n^2 des termes négligés, dans la grande parenthèse, restant fini lorsque n augmente indéfiniment.

Cette formule suppose d'ailleurs qu'en décrivant le chemin d'intégration final, la variable tourne, autour du point $u = c$, dans le sens direct. Il faut changer le signe du second membre, si le déplacement de la variable, autour de ce point, se fait dans le sens rétrograde.

La détermination du facteur $\left(\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^{\beta+1}$ se fixe de la façon suivante :

Supposons que les coefficients B du développement

$$f(u) = (u-c)^{\beta}[B_1 + B_2(u-c) + \ldots]$$

soient calculés de façon à correspondre à un argument bien défini de $u - c$, le long du contour d'intégration. Dans ces conditions, l'argument de $\frac{\varphi}{\varphi'}$ qu'il convient de prendre est celui qui diffère le moins de l'argument de $u - c$, en un point quelconque du contour choisi dans la région du plan couverte de hachures. On démontre qu'il est égal à l'argument de $u - c$, au point de rencontre de la partie du contour final, tracée dans la région couverte de hachures, et de la perpendiculaire à la droite Δ menée par c.

Applications. — Appliquons les résultats précédents à l'intégrale

$$J = \int_C f(u)\, E^{nu\sqrt{-1}}\, du,$$

E désignant encore la base des logarithmes népériens et le contour C étant tel que celui marqué sur la figure 6. Dans le cas actuel, la droite Δ est parallèle à l'axe des abscisses et la région du plan pour laquelle

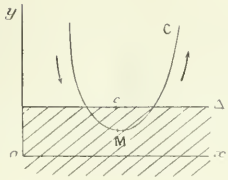
$$|\varphi(u)| > |\varphi(c)|$$

est au-dessous de Δ.

Supposons que les coefficients B du développement de $f(u)$ correspondent à l'argument de $u - c$ qui est nul sur la droite Δ, à droite du point c. L'argument de $u - c$ au point M du contour, placé sous le

point c, est alors égal à $-\frac{\pi}{2}$. C'est donc cette valeur qu'il faut multi-

Fig. 6.



plier par $\beta+1$, pour avoir l'argument de $\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^{\beta+1}$. Appliquant la formule (8), on trouve

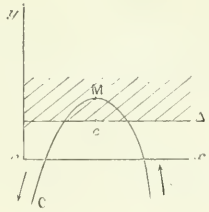
$$(9)\qquad J = \frac{2\pi}{\Gamma(-\beta)} E^{-\beta\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} \frac{E^{uc\sqrt{-1}}}{u^{\beta+1}} \left[B_1 + \sqrt{-1}\,\frac{\beta+1}{u} B_2 + \ldots\right].$$

Comme seconde application, nous prendrons

$$J = \int_C f(u)\, E^{-ua\sqrt{-1}}\, du.$$

La région dans laquelle $|\varphi(u)| > |\varphi(c)|$ est maintenant au-dessus

Fig. 7.



de Δ. Le contour C doit occuper une situation, telle que celle qui est représentée sur la figure 7, par rapport au point c, pour que la considération de ce point conduise à l'expression asymptotique de l'intégrale.

Supposant, comme ci-dessus, les coefficients B du développement

de $f(u)$, dans le voisinage de la valeur $u = c$, choisis de manière à correspondre à l'argument de $u - c$ qui est nul sur la droite Δ, à droite de c, on trouve

$$(10) \qquad I = -\frac{2\pi}{\Gamma(-\beta)} E^{\beta\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} \frac{E^{-nc\sqrt{-1}}}{n^{\beta+1}} \left[B_1 - \sqrt{-1}\,\frac{\beta+1}{n} B_2 + \ldots \right].$$

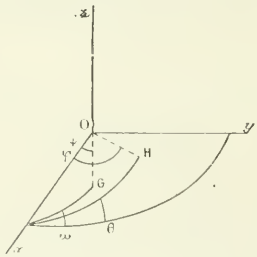
Les formules (9) et (10) supposent que la variable chemine le long du contour d'intégration de façon à tourner, dans le sens direct, autour du point c. Si elle tourne, au contraire, dans le sens rétrograde, il faut changer les signes des seconds membres.

II.

Supposons qu'un diaphragme rectangulaire A soit disposé devant l'objectif d'une lunette mise au point sur l'infini. Soient Ox, Oy, Oz trois axes de coordonnées rectangulaires issus du centre de A et tracés l'un, Ox, perpendiculairement au plan du diaphragme, les deux autres, Oy et Oz, parallèlement à ses côtés. Appelons h la longueur du côté de A parallèle à Oz et a celle du côté parallèle à Oy.

Considérons une première direction OG, définie par les angles ψ, ω,

Fig. 8.



marqués sur la figure, et une autre direction OH, définie de même par les angles φ et θ. Nous nous proposons tout d'abord de résoudre la question suivante :

Une surface lumineuse, située à l'infini dans la direction GO, se voit de l'origine sous un angle solide infiniment petit. Les ondes qui

en émanent sont diffractées par l'ouverture A. On demande de calculer l'intensité lumineuse qui arrive, dans le plan focal de la lunette d'observation, au foyer Q des ondes qui se propagent perpendiculairement à OH.

Appelons P le plan perpendiculaire à OH placé entre l'ouverture A et l'objectif, à la distance q de l'origine. Les mouvements vibratoires partant d'un point quelconque de ce plan mettent le même temps τ pour arriver au point Q.

Prenons comme phase origine, au temps t, la phase des vibrations incidentes en O. La distance d'un point M (o, y, z) de l'ouverture A au plan perpendiculaire à OG, mené par O, ayant pour valeur

$$y \sin\psi \cos\omega + z \sin\psi \sin\omega,$$

la phase en M au temps t est

$$\frac{t}{T} - \frac{y \sin\psi \cos\omega + z \sin\psi \sin\omega}{\lambda},$$

pour les radiations de longueur d'onde λ et de période T.

D'autre part, la distance de M au plan P ayant pour valeur

$$q - y \sin\varphi \cos\theta - z \sin\varphi \sin\theta,$$

la phase du mouvement vibratoire arrivant au temps t en Q est

$$\frac{t-\tau}{T} - \frac{q}{\lambda} + \frac{y(\sin\varphi\cos\theta - \sin\psi\cos\omega) + z(\sin\varphi\sin\theta - \sin\psi\sin\omega)}{\lambda}.$$

La vitesse vibratoire diffractée par un élément de surface, décrit autour de M, est donc $U\,dy\,dz$, en posant

$$U = G \sin 2\pi\left[\frac{t-\tau}{T} - \frac{q}{\lambda} + \frac{y(\sin\varphi\cos\theta - \sin\psi\cos\omega) + z(\sin\varphi\sin\theta - \sin\psi\sin\omega)}{\lambda}\right],$$

G étant indépendant de x et de y.

La vitesse vibratoire diffractée par toute l'ouverture A a elle-même pour valeur

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} U\,dz,$$

intégrale qui se réduit, tous calculs faits, à

$$GN\,ab \sin 2\pi\left(\frac{t-\tau}{T} - \frac{q}{\lambda}\right),$$

en posant

$$(11)\qquad X = \frac{\sin \pi h \dfrac{\sin\varphi \sin\theta - \sin\psi \sin\omega}{\lambda}}{\pi h \dfrac{\sin\varphi \sin\theta - \sin\psi \sin\omega}{\lambda}} \times \frac{\sin \pi a \dfrac{\sin\varphi \cos\theta - \sin\psi \cos\omega}{\lambda}}{\pi a \dfrac{\sin\varphi \cos\theta - \sin\psi \cos\omega}{\lambda}}.$$

L'intensité de ce mouvement vibratoire est proportionnelle à $a^2 h^2 G^2 X^2$. Mais le facteur G^2 lui-même est proportionnel à l'angle solide sous-tendu par la source, c'est-à-dire à $\sin\psi\, d\omega\, d\psi$. L'intensité lumineuse émanant de l'élément de la source, situé dans la direction GO et arrivant en Q, peut donc se représenter par

$$\mathcal{A}^2 a^2 h^2 X^2 \sin\psi\, d\omega\, d\psi,$$

$\mathcal{A}$ désignant une constante proportionnelle à l'éclat intrinsèque angulaire de la source.

Admettons maintenant que la lumière, au lieu de provenir d'une source infiniment petite, émane d'un astre circulaire de diamètre 2ε dont le centre se trouve dans la direction xO.

L'intensité lumineuse totale diffractée par le diaphragme, dans la direction OH, et par conséquent au point Q du plan focal de la lunette, a pour expression

$$\mathcal{A}^2 a^2 h^2 \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} d\psi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin\psi\, X^2\, d\omega,$$

X étant donné par la formule (11).

III.

Nous nous proposons d'étudier les variations de l'intensité le long du rayon de l'image focale parallèle au grand côté, de longueur h, du diaphragme. Il faut donc faire $\theta = \frac{\pi}{2}$ dans l'expression ci-dessus. Posant

$$(12)\qquad m = \frac{\pi h \sin\varepsilon}{\lambda}, \qquad n = \frac{\pi a \sin\varepsilon}{\lambda}$$

et

$$(13)\qquad K = \frac{1}{\mathcal{A}^2 a^2 h^2 \sin^2\varepsilon},$$

l'intensité I, le long de ce rayon particulier, dépend de l'intégrale

$$(14)\quad K\sin^2\varepsilon = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \sin\psi\, d\psi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \times \left[\frac{\sin m\dfrac{\sin\varphi - \sin\psi\sin\omega}{\sin\varepsilon}}{m\dfrac{\sin\varphi - \sin\psi\sin\omega}{\sin\varepsilon}}\right]^2 \times \left[\frac{\sin n\dfrac{\sin\psi\cos\omega}{\sin\varepsilon}}{n\dfrac{\sin\psi\cos\omega}{\sin\varepsilon}}\right]^2 d\omega$$

que nous allons tout d'abord transformer en posant

$$(15)\qquad \alpha = \frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon},$$

et en effectuant le changement de variable défini par les égalités

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sin\psi\sin\omega}{\sin\varepsilon} = u, \\ \dfrac{\sin\psi\cos\omega}{\sin\varepsilon} = t, \end{cases}$$

u et t étant les nouvelles variables d'intégration. On tire des équations (16)

$$(16')\qquad \begin{cases} \omega = \operatorname{arc\,tang}\dfrac{u}{t}, \\ \sin^2\psi = (u^2 + t^2)\sin^2\varepsilon. \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\omega}{\partial u} & \dfrac{\partial\omega}{\partial t} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\sin^2\varepsilon}{\sin\psi\cos\psi};$$

ψ étant compris entre $\pm\varepsilon$, on a, d'après la seconde équation (16'),

$$\cos\psi = \sqrt{1 - (u^2 + t^2)\sin^2\varepsilon},$$

le radical étant affecté du signe $+$.

Il en résulte que l'élément différentiel de la nouvelle intégrale double est

$$\frac{\sin^2\varepsilon}{\sqrt{1 - (u^2 + t^2)\sin^2\varepsilon}} \left[\frac{\sin m(u - \alpha)}{m(u - \alpha)}\right]^2 \left[\frac{\sin nt}{nt}\right]^2 du\, dt.$$

Or le champ d'intégration primitif est limité par la circonfé-

rence $\psi = \varepsilon$; les limites de la nouvelle intégrale doivent donc satisfaire, d'après la seconde équation (16'), à la condition

$$u^2 + t^2 = 1.$$

D'autre part, la première équation (16) montre que u et t varient entre -1 et $+1$ quand les variables ω et ψ parcourent le champ d'intégration primitif. Nous pouvons donc prendre, comme limites du signe $\int$ dépendant de la variable u, les valeurs $u = +1$ et $u = -1$, et comme limites du signe $\int$ dépendant de la variable t, les valeurs $+\sqrt{1-u^2}$ et $-\sqrt{1-u^2}$.

En résumé, on peut écrire

$$\sin^2\varepsilon K = \int_{-1}^{+1}\left[\frac{\sin m(u-\alpha)}{m(u-\alpha)}\right]^2 du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{+\sqrt{1-u^2}}\left[\frac{\sin nt}{nt}\right]^2 \frac{\sin^2\varepsilon}{\sqrt{1-(u^2+t^2)\sin^2\varepsilon}}\,dt.$$

Cette intégrale peut être simplifiée en remarquant que, $\sin\varepsilon$ étant très petit, le radical $\sqrt{1-(u^2+t^2)\sin^2\varepsilon}$ diffère très peu de 1. En admettant une erreur relative de l'ordre de $\sin^2\varepsilon$ ($\frac{1}{16000}$ pour le Soleil), on peut donc prendre finalement

$$(17)\qquad K = \int_{-1}^{+1}\left[\frac{\sin m(u-\alpha)}{m(u-\alpha)}\right]^2 du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{+\sqrt{1-u^2}}\left[\frac{\sin nt}{nt}\right]^2 dt.$$

Telle est la fonction de α ou de ξ que nous avons à étudier.

Observant que

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{\sin m(u-\alpha)}{m(u-\alpha)}\right]^2 = -\frac{d}{du}\left[\frac{\sin m(u-\alpha)}{m(u-\alpha)}\right]^2,$$

on déduit de la formule (17)

$$\frac{dK}{d\alpha} = -\int_{-1}^{+1}\frac{d}{du}\left[\frac{\sin m(u-\alpha)}{m(u-\alpha)}\right]^2 du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{+\sqrt{1-u^2}}\left[\frac{\sin nt}{nt}\right]^2 dt,$$

d'où l'on tire, en intégrant par parties et remarquant que la partie intégrée est nulle,

$$(18)\qquad \frac{dK}{d\alpha} = 2\int_{-1}^{+1}\left[\frac{\sin m(u-\alpha)}{m(u-\alpha)}\right]^2\left[\frac{\sin n\sqrt{1-u^2}}{n\sqrt{1-u^2}}\right]^2 \frac{u\,du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

IV.

Nous nous bornerons, dans le présent Mémoire, à étudier l'intensité I ou, ce qui revient au même, l'intégrale K, lorsque la largeur a de l'ouverture disposée devant la lunette d'observation est assez faible pour que la valeur de $n = \frac{\pi a \sin \varepsilon}{\lambda}$ soit petite. Dans ces conditions, les facteurs dépendant de n, dans les intégrales (17) et (18), se réduisent pratiquement à l'unité et il vient

$$(19) \qquad K = 2\int_{-1}^{+1} \left[\frac{\sin m(u-\alpha)}{m(u-\alpha)}\right]^2 \sqrt{1-u^2}\, du,$$

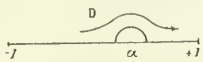
$$(20) \qquad \frac{dK}{d\alpha} = -2\int_{-1}^{+1} \left[\frac{\sin m(u-\alpha)}{m(u-\alpha)}\right]^2 \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\, du.$$

Appelons K_B la valeur de K, au bord géométrique de l'image, pour lequel $\varphi = \varepsilon$ et $\alpha = 1$. On a

$$(21) \qquad \begin{cases} K_B = 2\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-u^2}\left[\frac{\sin m(u-1)}{m(u-1)}\right]^2 du, \\ \left(\frac{dK}{d\alpha}\right)_B = -2\int_{-1}^{+1} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\left[\frac{\sin m(u-1)}{m(u-1)}\right]^2 du. \end{cases}$$

Nous allons montrer comment on peut calculer les intégrales (19) et (21), avec de faibles erreurs relatives, pour m très grand, en s'appuyant sur les résultats, rappelés au paragraphe I et tirés de mon Mémoire sur l'approximation des fonctions de grands nombres.

Fig. 9.



1° Nous nous occuperons d'abord de l'intégrale (19), en supposant $\alpha^2 < 1$.

Dans le plan représentatif de la variable u, considérée comme complexe, décrivons du point $u = \alpha$, comme centre, une demi-circonférence σ de rayon infiniment petit, du côté des ordonnées positives. La

fonction sous le signe $\int$ étant holomorphe, dans le voisinage de la valeur $u = \alpha$, on peut remplacer le diamètre de cette demi-circonférence qui fait partie du chemin d'intégration donné, par la courbe elle-même. Appelons D le chemin d'intégration ainsi obtenu. On peut écrire

$$(22) \qquad m^2 K = \int_D \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-\alpha)^2} du - \int_D \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-\alpha)^2} \cos 2m(u-\alpha)\, du.$$

Considérons l'intégrale

$$J = \int_D \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-\alpha)^2} \sin 2m(u-\alpha)\, du.$$

La partie de J prise le long de la portion du contour D qui se confond avec l'axe des abscisses est évidemment réelle. Nous allons calculer celle qui est prise le long de σ. A cet effet, il suffit de développer l'élément différentiel suivant les puissances ascendantes de $u - \alpha$. Tous les termes donnent des intégrales réelles, à l'exception du terme en $\frac{1}{u-\alpha}$ qui a pour expression

$$\frac{2m\sqrt{1-\alpha^2}}{u-\alpha}.$$

Or on a

$$\int_\sigma \frac{du}{u-\alpha} = -i\pi \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

Il résulte de là que la somme

$$J + i\pi\, 2m\sqrt{1-\alpha^2}$$

est réelle. On peut donc considérer le second membre de la formule (22) comme la partie réelle de

$$m^2 K - i(J + i\pi\, 2m\sqrt{1-\alpha^2}),$$

c'est-à-dire de

$$(23) \qquad 2m\pi\sqrt{1-\alpha^2} + \int_C \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-\alpha)^2} du - H,$$

en faisant

$$(24) \qquad H = \int_D \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-\alpha)^2} E^{2mi(u-\alpha)} du.$$

Or on a, pour $\alpha^2 < 1$, à une constante près,

$$\int \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-\alpha)^2}\,du = -\frac{\sqrt{1-u^2}}{u-\alpha} - \arcsin u$$
$$+ \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left[\mathrm{L}\left(1 - u\alpha + \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-u^2}\right) - \mathrm{L}(u-\alpha)\right].$$

Cette intégrale, prise le long du chemin D, a pour valeur

$$-\pi + i\pi\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

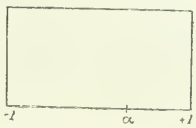
$m^2\mathrm{K}$ est donc, d'après l'expression (23), la partie réelle de la somme

$$(25)\qquad 2m\pi\sqrt{1-\alpha^2} - \pi + \pi\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\,i - \mathrm{H}.$$

Reste à évaluer H.

Par les points $u = -1$ et $u = +1$, menons deux ordonnées positives égales, prolongées à l'infini, et joignons leurs extrémités par une

Fig. 10.



droite parallèle à l'axe des abscisses. L'intégrale (24), prise le long de cette droite, est nulle puisque $|\mathrm{E}^{t(u-\alpha)}|$ est alors nul. Désignons par D′ l'ordonnée partant du point $u = -1$ et par D″ celle qui correspond à $u = 1$. Convenant de suivre ces chemins, en partant respectivement des points $u = -1$ et $u = +1$, on peut écrire, d'après la formule (24),

$$(26)\qquad \mathrm{H} = \int_{\mathrm{D}} = \int_{\mathrm{D}'} - \int_{\mathrm{D}''},$$

l'élément différentiel n'ayant pas de points singuliers dans l'aire limitée par D, D′ et D″. Ce changement de contour est d'ailleurs justifié, bien que les points $u = -1$ et $u = +1$ soient des points singuliers de l'élément différentiel, parce que les produits de cette fonction par $u - 1$

et par $u+1$ tendent vers zéro respectivement en même temps que $u-1$ et $u+1$.

$|E^{iu\alpha}|$ décroît, quand on s'éloigne de l'axe des abscisses, du côté des ordonnées positives. Chacune des intégrales $\int_{D'}$, $\int_{D''}$ figurant dans l'expression (18) de H est de la forme

$$\int f(u)\varphi^n(u)\,du,$$

où u représente le grand nombre $2m$, $|\varphi(u)|$ prenant d'ailleurs sa plus grande valeur, le long du contour d'intégration, à l'extrémité d'où part la variable. On est donc conduit, pour trouver la valeur asymptotique de ces intégrales, avec une faible erreur relative, pour m très grand, à appliquer la formule (5) qui suppose la connaissance des développements de $\frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-\alpha)^2}$ dans le voisinage des points $u=-1$ et $u=+1$.

On a dans le voisinage du point $u=-1$, sur le contour D′,

$$(27)\qquad \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-\alpha)^2}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{1+u}}{(1+\alpha)^2}\left[1+\frac{7-\alpha}{4(1+\alpha)}(1+u)+\ldots\right],$$

$1+u$ étant affecté de son plus petit argument positif et, dans le voisinage du point $u=+1$, sur le contour D″,

$$(28)\qquad \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-\alpha)^2}=E^{-i\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{2}\sqrt{u-1}}{(1-\alpha)^2}\left[1-\frac{7+\alpha}{4(1-\alpha)}(u-1)+\ldots\right],$$

$u-1$ étant affecté de son plus petit argument positif.

Il importe d'observer, pour des raisons que nous verrons plus loin, que la partie entre crochets du premier développement procède suivant les puissances de $\frac{1-u}{1+\alpha}$ et la partie entre crochets du second développement suivant celles de $\frac{u-1}{1-\alpha}$.

Partant du développement (27) et appliquant la formule (5), on trouve

$$(29)\qquad \int_{D'}=-\frac{1}{(1+\alpha)^2}\frac{\sqrt{\pi}}{4m^{\frac{3}{2}}}\left[1+i\frac{3}{16m}\frac{7-\alpha}{1+\alpha}+\ldots\right]E^{-i\left[\frac{\pi}{4}+2m(1+\alpha)\right]}.$$

De même, en partant du développement (28), on trouve

$$(30)\qquad \int_{\mathrm{B}'} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{4m^{\frac{3}{2}}}\left[1 - i\,\frac{3}{16m}\,\frac{7+\alpha}{1-\alpha} + \ldots\right] \mathrm{E}^{i\left[\frac{\pi}{4} + 2m(1-\alpha)\right]}.$$

La formule (26) donne ensuite la valeur de H que l'on porte dans la somme (25), dont on déduit

$$\begin{aligned}(31)\qquad m^2\mathrm{K} = {} & 2m\pi\sqrt{1-\alpha^2} - \pi \\ & + \frac{1}{(1+\alpha)^2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{4m^{\frac{3}{2}}}\left\{\cos\left[\frac{\pi}{4} + 2m(1+\alpha)\right]\right. \\ & \qquad\qquad \left. + \frac{3}{16m}\,\frac{7-\alpha}{1+\alpha}\sin\left[\frac{\pi}{4} + 2m(1+\alpha)\right] + \ldots\right\} \\ & + \frac{1}{(1-\alpha)^2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{4m^{\frac{3}{2}}}\left\{\cos\left[\frac{\pi}{4} + 2m(1+\alpha)\right]\right. \\ & \qquad\qquad \left. + \frac{3}{16m}\,\frac{7+\alpha}{1-\alpha}\sin\left[\frac{\pi}{4} + 2m(1-\alpha)\right] + \ldots\right\},\end{aligned}$$

les produits par m^2 des termes négligés, dans les crochets, restant finis lorsque m croît indéfiniment.

Les développements (27) et (28) supposent essentiellement, pour être valables simultanément, α compris entre -1 et $+1$, à l'exception de ces valeurs elles-mêmes. La formule (31) n'a donc pas de sens pour $\alpha = \pm 1$; toutefois elle donne l'expression asymptotique de K, pour m infiniment grand, quand α reçoit une valeur *fixe*, aussi voisine que l'on veut de ces limites.

Mais si m, au lieu d'être infiniment grand, est simplement un nombre élevé, il peut arriver que l'on ne puisse en tirer parti. Cette circonstance provient de ce que les développements entre crochets procèdent, en réalité, l'un suivant les puissances de $\frac{1}{m(1+\alpha)}$, l'autre suivant les puissances de $\frac{1}{m(1-\alpha)}$. Pour s'en rendre compte, il faut se reporter à la remarque que nous avons faite, à propos des développements (27) et (28) qui procèdent suivant les puissances de $\frac{u+1}{1+\alpha}$ et $\frac{u-1}{1-\alpha}$. Or il résulte, des théories exposées dans mon Mémoire sur l'approximation des fonctions de grands nombres, qu'au terme en $\frac{(u+1)^p}{(1+\alpha)^p}$, entre crochets dans le développement (27), correspond un

terme en $\frac{1}{(1+\alpha)^p}\frac{1}{m^{\frac{3}{2}+p}}$ dans le développement asymptotique de $\int_{D'}$, et qu'au terme en $\frac{(u-1)^p}{(1-\alpha)^p}$, entre crochets dans le développement (28), correspond un terme en $\frac{1}{(1-\alpha)^p}\frac{1}{m^{\frac{3}{2}+p}}$, dans le développement asymptotique de l'intégrale $\int_{D''}$.

Le développement asymptotique de H et par suite celui de m^2K procède donc suivant les puissances de $\frac{1}{m(1+\alpha)}$ et $\frac{1}{m(1-\alpha)}$, comme nous l'avons annoncé.

Reste maintenant à déterminer dans quelles conditions on peut appliquer l'expression (31) de K, lorsque α devient voisin de 1, par exemple.

Il faut pour cela que $m(1-\alpha)$ soit un nombre élevé et le terme en $2m\pi\sqrt{1-\alpha^2}$ est alors le terme principal de la valeur de m^2K.

Or

$$m(1-\alpha)=\frac{\pi h\sin\varepsilon}{\lambda}\left(1-\frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon}\right),$$

où, comme ε et φ sont de l'ordre du demi-degré

$$m(1-\alpha)=\pi\frac{h}{\lambda}(\varepsilon-\varphi),$$

avec une faible erreur relative.

La condition pour que l'expression (31) reste applicable, quand α est voisin de 1 et par suite φ voisin de ε, est donc que le produit

$$\frac{\pi h}{\lambda}(\varepsilon-\varphi)$$

soit un nombre suffisamment élevé.

2° Nous allons maintenant évaluer l'intégrale (23) quand $\alpha^2>1$.

La valeur $u=\alpha$ étant en dehors du champ de l'intégration, on peut alors écrire

$$m^2\mathrm{K}=\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-\alpha)^2}du=\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-\alpha)^2}\cos 2m(u-\alpha)\,du.$$

Or on a, à une constante près,

$$\int\frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-\alpha)^2}du=\frac{\sqrt{1-u^2}}{u-\alpha}-\arcsin u+\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}}\arcsin\frac{u\alpha-1}{\alpha-u}.$$

On en déduit que $m^2 K$ est la partie réelle de l'expression

$$-\pi + \pi \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} - \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-\alpha)^2} E^{2mi(u-\alpha)}\, du.$$

L'intégrale qui y figure se calcule exactement comme l'intégrale H, considérée lorsque $\alpha^2 < 1$, en remplaçant le chemin d'intégration par les deux chemins D′ et D″, et a même expression analytique. On a donc, lorsque $\alpha^2 > 1$,

$$(32)\quad m^2 K = \pi \left[\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} - 1 \right]$$
$$+ \frac{1}{(1+\alpha)^2} \frac{\sqrt{\pi}}{4 m^{\frac{3}{2}}} \left\{ \cos\left[\frac{\pi}{4} + 2m(1+\alpha)\right] \right.$$
$$\left. + \frac{3}{16m} \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \sin\left[\frac{\pi}{4} + 2m(1+\alpha)\right] + \ldots \right\}$$
$$+ \frac{1}{(1-\alpha)^2} \frac{\sqrt{\pi}}{4 m^{\frac{3}{2}}} \left\{ \cos\left[\frac{\pi}{4} + 2m(1-\alpha)\right] \right.$$
$$\left. + \frac{3}{16m} \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \sin\left[\frac{\pi}{4} + 2m(1-\alpha)\right] + \ldots \right\},$$

les produits par m^2 des termes négligés, dans les crochets, restant finis lorsque m croît indéfiniment.

Cette expression suppose essentiellement que α ne prend pas les valeurs ± 1; mais α peut recevoir des valeurs fixes voisines de ces limites. Dans les applications, l'expression (32), quand m est un grand nombre, peut servir à calculer K, avec une faible erreur relative, tant que $m(1+\alpha)$ et $m(1-\alpha)$ ont des valeurs absolues élevées; c'est-à-dire tant que $\pi \frac{h}{\lambda}(\varphi - \varepsilon)$ a une valeur élevée, dans le cas où α est voisin de 1.

3° Les moyens qui viennent d'être employés ne réussissent plus quand $\alpha = 1$. Pour tourner la difficulté il convient d'écrire, d'après la formule (21),

$$\frac{m^2}{2} K_B = \int_{-1}^{+1} |\sin m(u-1)|^2\, du \left[2\frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}} - \arcsin u \right],$$

$\arcsin u$ étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Intégrant par parties

$$\frac{m^2}{2} K_B = -\frac{\pi}{2}\sin^2 2m - m\int_{-1}^{+1}\left[2\frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}} - \arcsin u\right]\sin 2m(u-1)\,du.$$

On peut donc écrire

$$(33)\qquad \frac{m^2}{2} K_B = \frac{\pi}{2}\sin^2 2m - m \text{ fois le coefficient de } \sqrt{-1}, \text{ dans } H_B$$

en posant

$$(34)\qquad H_B = \int_{-1}^{+1}\left[2\frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}} - \arcsin u\right] E^{2m(u-1)\sqrt{-1}}\,du.$$

On peut exécuter maintenant le même changement de contour d'intégration que pour le calcul de l'expression (25) et écrire

$$H_B = \int_{D'} f(u)\, E^{2m(u-1)\sqrt{-1}}\,du - \int_{D''} f(u)\, E^{2m(u-1)\sqrt{-1}}\,du,$$

ou encore

$$H_B = \frac{\pi}{2}\int_{D'} E^{2m(u-1)\sqrt{-1}}\,du + \int_{D'}\left[f(u) - \frac{\pi}{2}\right] E^{2m(u-1)\sqrt{-1}}\,du$$
$$+ \frac{\pi}{2}\int_{D''} E^{2m(u-1)\sqrt{-1}}\,du - \int_{D''}\left[f(u) + \frac{\pi}{2}\right] E^{2m(u-1)\sqrt{-1}}\,du,$$

en posant

$$f(u) = 2\frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}} - \arcsin u.$$

Intégrant, il vient

$$(35)\qquad H_B = \frac{\pi}{4m}\left[\sin 4m + (1+\cos 4m)\sqrt{-1}\right]$$
$$+ \int_{D}\left[f(u) - \frac{\pi}{2}\right] E^{2m(u-1)\sqrt{-1}}\,du - \int_{D''}\left[f(u) + \frac{\pi}{2}\right] E^{2m(u-1)\sqrt{-1}}\,du.$$

La valeur asymptotique de chacune des intégrales, figurant dans cette expression de J_B, peut être obtenue en appliquant la formule (5), après avoir mis $E^{-2m\sqrt{-1}}$ hors des signes $\int$.

Dans le voisinage du point $u = -1$, on a, le long du contour D',

$$(36)\qquad f(u) - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(u+1)^{\frac{3}{2}} + \ldots.$$

On a de même, dans le voisinage du point $u = +1$, le long du contour D″,

$$(37)\qquad f(u) + \frac{\pi}{2} = (u-1)^{-\frac{1}{2}}\left[2\sqrt{-1}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}(u-1) + \ldots\right],$$

les binomes $u+1$ et $u-1$ étant affectés de leur plus petit argument positif.

Partant du développement (36), on trouve

$$(38)\qquad \int_{D''}\left[f(u) - \frac{\pi}{2}\right] E^{2m(u-1)\sqrt{-1}}\,du$$
$$= -\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - 4m\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - 4m\right)\right]\frac{\sqrt{\pi}}{32m^{\frac{5}{2}}}(1+\varepsilon'),$$

ε' tendant vers zéro lorsque m augmente indéfiniment.

Le développement (37) conduit de même à l'expression

$$(39)\qquad \int_{D''}\left[f(u) + \frac{\pi}{2}\right] E^{2m(u-1)\sqrt{-1}}\,du$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2m}}\left[-2 + \frac{1}{8m} + \ldots + \sqrt{-1}\left(2 + \frac{1}{8m} + \ldots\right)\right],$$

les termes non calculés étant de l'ordre de $\frac{1}{m^{\frac{5}{2}}}$.

En résumé, en négligeant les termes de l'ordre de $\frac{1}{m^{\frac{5}{2}}}$, on a, d'après les formules (34), (38) et (39),

$$(40)\qquad H_B = \frac{\pi}{4m}\left[\sin 4m + 2\sqrt{-1}\cos^2 2m\right]$$
$$+ \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2m}}\left[2 - \frac{1}{8m} + \ldots - \sqrt{-1}\left(2 + \frac{1}{8m} + \ldots\right)\right].$$

La formule (33) donne ensuite

$$(41)\qquad \frac{m^2}{2}K_B = \sqrt{2\pi m} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8\sqrt{2\pi m}} + \ldots,$$

les termes négligés, dans le second membre, étant de l'ordre de $\frac{1}{|m|^{\frac{3}{2}}}$.

Des moyens analogues à ceux qui viennent d'être employés conduisent à l'évaluation approchée de la seconde intégrale (21),

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\mathrm{K}}{dz}\right)_{\mathrm{B}} = -\int_{-1}^{+1} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\left[\frac{\sin m(u-1)}{m(u-1)}\right]^2 du,$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{3m^2}{2}\left(\frac{d\mathrm{K}}{dz}\right)_{\mathrm{B}} = -\int_{-1}^{+1} [\sin m(u-1)]^2\, d\left[\frac{\sqrt{1-u^2}}{(1-u)^2} - 2\frac{\sqrt{1-u^2}}{1-u}\right].$$

Intégrant par parties, il vient

$$\frac{3m^2}{2}\left(\frac{d\mathrm{K}}{dz}\right)_{\mathrm{B}} = m\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1+u}}{(1-u)^{\frac{3}{2}}} \sin 2m(u-1)\, du$$
$$- 2m\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}} \sin 2m(u-1)\, du$$

ou

$$\frac{3m^2}{2}\left(\frac{d\mathrm{K}}{dz}\right)_{\mathrm{B}} = m\int_{-1}^{+1} d\left[2\frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}} - \arcsin u\right] \sin 2m(u-1)$$
$$- 2m\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}} \sin 2m(u-1)\, du.$$

Effectuant une nouvelle intégration par parties, on trouve

$$\frac{3m^2}{2}\left(\frac{d\mathrm{K}}{dz}\right)_{\mathrm{B}} = m\frac{\pi}{2}\sin 4m - 2m^2\int_{-1}^{+1}\left[2\frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}} - \arcsin u\right]\cos 2m(u-1)\, du$$
$$- 2m\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}} \sin 2m(u-1)\, du.$$

Or la première intégrale figurant dans le second membre est la partie réelle de H_{B} comme le montre la formule (34). La formule (40) donne son expression asymptotique. On a donc

$$(42)\qquad \frac{3m^2}{2}\left(\frac{d\mathrm{K}}{dz}\right)_{\mathrm{B}} = -m\sqrt{2\pi m}\left(2 - \frac{1}{8m} + \ldots\right)$$
$$- 2m\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}} \sin 2m(u-1)\, du,$$

le produit par $m^{\frac{3}{2}}$ des termes négligés restant fini lorsque m augmente indéfiniment.

L'intégrale qui reste à calculer est le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans

$$(43)\qquad L = \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}} E^{2m(u-1)\sqrt{-1}}\, du$$

qui se calcule en remplaçant le contour d'intégration par les chemins D′ et D″ déjà considérés et écrivant

$$L = \int_{D'} f(u)\, E^{2m(u-1)\sqrt{-1}}\, du - \int_{D''} f(u)\, E^{2m(u-1)\sqrt{-1}}\, du.$$

Dans la circonstance, on a dans le voisinage du point $u = -1$, le long du contour D′,

$$f(u) = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}} = \sqrt{1+u}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}(u+1) + \ldots\right],$$

et dans le voisinage du point $u = 1$, le long du contour D″,

$$\sqrt{\frac{1+u}{1-u}} = (u-1)^{-\frac{1}{2}}\left[\sqrt{2}\sqrt{-1} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{-1}}{4}(u-1) + \ldots\right].$$

Appliquant la formule (5), après avoir mis $E^{2m\sqrt{-1}}$ en dehors des signes $\int$, on trouve

$$\int_{D'} = \left[-\cos\left(\frac{\pi}{4} + 4m\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 4m\right)\right]\frac{\sqrt{\pi}}{8m^{\frac{3}{2}}} + \ldots,$$

les termes négligés étant de l'ordre de $\frac{1}{m^{\frac{5}{2}}}$;

$$\int_{D''} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2m}}\left[-1 - \frac{1}{16m} + \ldots + \sqrt{-1}\left(1 - \frac{1}{16m} + \ldots\right)\right],$$

les termes négligés étant de l'ordre de $\frac{1}{m^{\frac{5}{2}}}$.

On déduit de là

$$(44)\qquad L = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2m}} + \frac{\sqrt{\pi}}{8(2m)^{\frac{3}{2}}}[1 - 2(\cos 4m - \sin 4m)] + \ldots$$
$$- \sqrt{-1}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2m}} - \frac{\sqrt{\pi}}{8(2m)^{\frac{3}{2}}}[1 + 2(\cos 4m + \sin 4m)] + \ldots\right\}.$$

Les formules (44), (43) et (42) donnent ensuite

$$(45)\qquad \frac{3m^2}{2}\left(\frac{dK}{d\alpha}\right)_B = -2m\sqrt{2\pi m} + \frac{9}{8}\sqrt{2\pi m}\,(1+\eta),$$

le produit $m\eta$ restant fini, lorsque m augmente indéfiniment.

V.

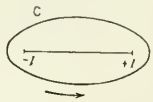
Les calculs se compliquent singulièrement, quand on cherche à évaluer les dérivées suivantes par une voie analogue. Aussi est-il préférable de changer de méthode.

Il est facile de voir que la formule (19) équivaut à la suivante :

$$(46)\qquad m^2K = \int_C \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-\alpha)^2}\sin^2 m(u-\alpha)\,du,$$

l'intégrale étant prise, dans le sens direct, le long d'un contour

Fig. 11.



fermé C renfermant les points $u=-1$, $u=+1$, et le segment de l'axe des abscisses qu'ils comprennent, à condition de prendre la détermination du radical $\sqrt{1-u^2}$ qui est purement imaginaire et positive, au point de rencontre du contour avec la partie positive de l'axe des abscisses. C'est ce qu'on voit immédiatement, en remplaçant le contour C par le chemin équivalent, constitué par un double lacet L (*fig.* 12) embrassant les points $u=-1$, $u=+1$ et le segment de l'axe des abscisses qu'ils limitent. Il suffit de remarquer : 1° que les parties de l'intégrale prises le long des circonférences infiniment petites sont nulles; 2° que le radical change de signe quand la variable décrit en entier chacune de ces circonférences.

Comme le point $u=\alpha$ n'est pas un point singulier de l'élément différentiel de l'intégrale, on peut toujours supposer que le contour C a été dilaté de façon à renfermer la valeur $u=\alpha$.

En vertu de l'identité

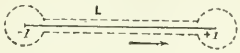
$$\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{\sin m(u-\alpha)}{m(u-\alpha)}\right]^2 = -\frac{d}{du}\left[\frac{\sin m(u-\alpha)}{m(u-\alpha)}\right]^2,$$

on a

$$\frac{dK}{d\alpha} = -\int_C \sqrt{1-u^2}\,\frac{d}{du}\left[\frac{\sin m(u-\alpha)}{m(u-\alpha)}\right]^2 du.$$

Intégrant par parties et observant que la partie intégrée est nulle,

Fig. 19.



comme reprenant sa valeur lorsque la variable, après avoir décrit le contour en entier, revient au point de départ, il vient

$$\frac{dK}{d\alpha} = \int_C \left[\frac{\sin m(u-\alpha)}{m(u-\alpha)}\right]^2 \frac{d}{du}\sqrt{1-u^2}\,du.$$

On en déduit, de proche en proche, la formule générale

$$\frac{d^p K}{d\alpha^p} = \int_C \left[\frac{\sin m(u-\alpha)}{m(u-\alpha)}\right]^2 \frac{d^p}{du^p}\sqrt{1-u^2}\,du.$$

On peut l'écrire

$$(17)\qquad 2m^2\frac{d^p K}{d\alpha^p} = \int_C \frac{1}{(u-\alpha)^2}\frac{d^p}{du^p}\sqrt{1-u^2}\,du - \int_C \frac{\cos 2m(u-\alpha)}{(u-\alpha)^2}\frac{d^p}{du^p}\sqrt{1-u^2}\,du.$$

Je dis que pour $p = 1$ la première intégrale figurant dans le second membre est nulle. Pour l'établir, il convient de dilater le contour C de façon qu'en tous ses points $|u|$ soit supérieur à 1 et à α. Dans ces conditions on peut développer l'élément différentiel suivant les puissances de $\frac{1}{u}$ et le terme de degré moindre en $\frac{1}{u}$ a un exposant au moins égal à 2. L'intégrale, développable en une série dont tous les termes sont nuls, est donc nulle elle-même. La formule (17) se réduit en conséquence à la suivante :

$$(18)\qquad 2m^2\frac{d^p K}{d\alpha^p} = -\int_C \frac{\cos 2m(u-\alpha)}{(u-\alpha)^2}\frac{d^p}{du^p}\sqrt{1-u^2}\,du.$$

VI.

Avant de calculer l'expression asymptotique de cette dérivée, pour p fixe et m très grand, proposons-nous de retrouver la valeur déjà obtenue, pour K_B, en faisant $\alpha = 1$ dans la formule (46),

$$(49) \qquad m^2 K_B = \int_C \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-1)^2} \sin^2 m(u-1)\, du.$$

On en tire

$$2m^2 K_B = \int_C \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-1)^2}\, du - \int_C \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-1)^2} \cos 2m(u-1)\, du.$$

Or on a

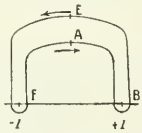
$$\frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-1)^2} = \frac{d}{du}\left[2\frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}} - \arcsin u\right].$$

Le contour C renfermant les deux points singuliers $u = +1$ et $u = -1$ de la fonction $\arcsin u$, la première intégrale a pour valeur[1] -2π. On peut donc écrire

$$(50) \quad 4m^2 K_B = -4\pi - \int_C \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-1)^2} E^{2m(u-1)i}\, du - \int_C \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-1)^2} E^{-2m(u-1)i}\, du.$$

Pour calculer la première intégrale qui figure dans le second

Fig. 13.



membre, nous pouvons donner au contour d'intégration C la forme indiquée sur la figure (13), et écrire

$$\int_C = \int_{ABE} + \int_{EFA}.$$

---

[1] On peut aussi calculer cette intégrale, en faisant en sorte que $|u|$ soit supérieur à 1 et à $|\alpha|$, tout le long du contour, après l'avoir convenablement dilaté. L'élément différentiel est alors développable suivant les puissances entières de $\frac{1}{u}$. Le résidu de cette fonction étant égal à $\sqrt{-1}$, on retombe immédiatement sur le résultat déjà obtenu.

Or ces deux nouvelles intégrales peuvent être évaluées en appliquant la formule (9) aux points singuliers $u = +1$ et $u = -1$.

Pour avoir la valeur de l'intégrale prise suivant ABE, il faut tout d'abord développer

$$f(u) = \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-1)^2},$$

dans le voisinage de $u = 1$, suivant les puissances de $u - 1$, ce binome étant affecté de l'argument nul sur l'axe des abscisses, à droite du point $u = 1$, au point B de rencontre du contour avec cet axe, par exemple. Or, en ce point, $\sqrt{1-u^2}$ a une valeur purement imaginaire positive, comme nous l'avons spécifié, pour établir la formule (46). Nous sommes donc amené à écrire

$$\sqrt{1-u^2} = i\sqrt{u-1}\sqrt{u+1} = i(u-1)^{\frac{1}{2}}\left[\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(u-1) + \ldots\right],$$

d'où

$$\frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-1)^2} = i(u-1)^{-\frac{1}{2}}\left[\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(u-1) + \ldots\right], \tag{51}$$

$u - 1$ étant affecté de l'argument nul à droite du point $u = +1$. Appliquant la formule (9) en y faisant $\beta = -\frac{3}{2}$ et rappelant que

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

on obtient

$$\int_{ABE} \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-1)^2} E^{2m(u-1)i}\, du = i\sqrt{2}\sqrt{2\pi m}\, E^{3\frac{\pi}{4}i}\left[i + \frac{1}{16m} + \ldots\right],$$

le produit par m^2 des termes négligés, entre crochets, restant fini lorsque m augmente indéfiniment.

Pour évaluer l'intégrale $\int_{EFA}$, il faut de même développer $\frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-1)^2}$, dans le voisinage de $u = -1$. Or on voit immédiatement que ce développement commence par un terme en $(u+1)^{\frac{1}{2}}$. L'application de la formule (9) montre donc que le terme de degré le plus élevé par rapport à m, dans le développement asymptotique de $\int_{EFA}$, a pour exposant $-\frac{3}{2}$. Il n'y a par suite pas lieu de calculer cette intégrale,

puisqu'elle fournirait des termes d'ordre supérieur à ceux que nous avons conservé dans l'expression de l'intégrale $\int_{ABE}$. De ce qui précède il résulte que l'on a

$$(52)\qquad \int_C \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-1)^2} E^{2m(u-1)i}\,du = 4\sqrt{2}\sqrt{2\pi m}\,E^{3\frac{\pi}{4}i}\left[i + \frac{1}{16m} + \ldots\right],$$

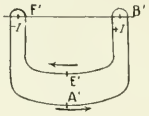
le produit par m^2 des termes négligés, entre crochets, restant fini lorsque m augmente indéfiniment.

Pour achever de calculer le second membre de la formule (50), il reste à évaluer l'intégrale

$$\int_C \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-1)^2} E^{-2m(u-1)i}\,du.$$

On remplace le contour C par le contour indiqué sur la figure 14 et l'on décompose l'intégrale en deux autres, prises sui-

Fig. 14.



vant les chemins A'B'E' et E'F'A', auxquelles on peut appliquer la formule (10). On reconnaît, pour la même raison que ci-dessus, que l'intégrale prise le long de E'F'A' est négligeable par rapport à celle qui est prise suivant le chemin A'B'E' et cette dernière s'obtient en partant du développement (51) de $\frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-1)^2}$, dans le voisinage du point $u = 1$, obtenu en affectant le binome $u - 1$ de son argument qui est nul au point B'. On obtient

$$(53)\qquad \int_C \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u-1)^2} E^{-2m(u-1)i}\,du = 4\sqrt{2}\sqrt{2\pi m}\,E^{-\frac{3\pi}{4}i}\left[-i + \frac{1}{16m} + \ldots\right],$$

le produit par m^2 des termes négligés, entre crochets, restant fini lorsque m augmente indéfiniment. Les formules (53), (52), (50) donnent ensuite

$$m^2 K_E = -\pi + 2\sqrt{2\pi m}\left[1 + \frac{1}{16m} + \ldots\right],$$

le produit par m^2 des termes négligés, entre crochets, restant fini lorsque m croît indéfiniment. C'est le résultat déjà obtenu [formule (41)].

La marche que nous venons de suivre s'impose pour tirer parti de la formule (48) qui peut s'écrire, pour $\alpha = 1$,

$$(54)\quad 4m^2\left(\frac{d^p K}{d\alpha^p}\right)_B = -\int_C \frac{E^{2m(u-1)i}}{(u-1)^2}\frac{d^p}{du^p}\sqrt{1-u^2}\,du - \int_C \frac{E^{-2m(u-1)i}}{(u-1)^2}\frac{d^p}{du^p}\sqrt{1-u^2}\,du.$$

Les intégrales contenues dans le second membre se calculent exactement comme dans le cas où $p = 0$, que nous venons d'examiner. Il n'y a de différence que dans le point de départ qui dépend du développement, dans le voisinage du point $u = 1$, de la fonction

$$f(u) = \frac{1}{(u-1)^2}\frac{d^p}{du^p}\sqrt{1-u^2}.$$

On reconnaît, pour les mêmes raisons que précédemment, qu'il n'y a pas lieu de faire intervenir les développements asymptotiques fournis par le point $u = -1$, du moment où l'on s'en tient à l'ordre d'approximation relative avec laquelle est calculée l'expression de K_B.

Nous avons obtenu, à propos de la formule (51),

$$\sqrt{1-u^2} = i(u-1)^{\frac{1}{2}}\sqrt{2}\left[1 + \frac{1}{4}(u-1) + \ldots\right].$$

Or on a

$$\frac{d^p}{du^p}(u-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^{p-1}}{2^p(2p-1)}\,.\,1.3.5\ldots(2p-1)(u-1)^{\frac{1}{2}-p},$$

et cette formule, écrite en conservant $2p-1$ en numérateur et dénominateur, s'applique pour $p > 1$. On commettrait une faute de signe pour $p = 1$, en supprimant $2p-1$ haut et bas. On a de même

$$\frac{d^p}{du^p}(u-1)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2^p}(-1)^p\frac{1.3\ldots(2p-1)}{(2p-3)(2p-1)}(u-1)^{\frac{3}{2}-p},$$

d'où

$$(55)\quad f(u) = \frac{1}{(u-1)^2}\frac{d^p}{du^p}\sqrt{1-u^2}$$

$$= (-1)^{p-1}\frac{1.3\ldots(2p-1)}{2^p(2p-1)}\,i\sqrt{2}\,(u-1)^{-p-\frac{3}{2}}\left[1 - \frac{3}{2p-3}\frac{u-1}{4} + \ldots\right],$$

l'argument de $u-1$ étant nul, pour les valeurs réelles de u supérieures à 1.

Les formules (9) et (10) fournissent les valeurs des intégrales figurant dans le second membre de la formule (54), en partant du développement (55).

Tenant compte de l'égalité

$$\Gamma\left(p+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1.3\ldots(2p+1)}{2^{p+1}}\sqrt{\pi}.$$

on arrive à la formule

$$(56)\quad m^2\left(\frac{d^p\mathrm{K}}{dx^p}\right)_{\mathrm{B}}=\frac{2}{4p^2-1}(2m)^p\sqrt{2\pi m}\left[-\cos p\frac{\pi}{2}-\sin p\frac{\pi}{2}\right.$$
$$\left.+\frac{3}{16m}\frac{2p+1}{2p-3}\left(\cos p\frac{\pi}{2}-\sin p\frac{\pi}{2}\right)+\ldots\right],$$

le produit par m^2 des termes négligés, entre crochets, restant fini lorsque m augmente indéfiniment. Cette formule n'est applicable que si l'entier p est petit par rapport à m dont la valeur est considérable. Nous l'utiliserons néanmoins bientôt pour obtenir un développement en série [formule (59)]. Mais comme les termes exacts très éloignés de ce développement sont certainement négligeables et que nous n'aurons à en retenir que les premiers termes, l'incorrection commise est pratiquement sans aucune importance.

VII.

Si la diffraction n'existait pas, l'image du Soleil, dans le plan focal de la lunette, serait limitée par une circonférence déterminée par les lois de l'optique géométrique. On lui donne, pour cette raison, le nom de *bord géométrique*. D'autre part, dans les observations solaires, on est astreint à affaiblir suffisamment la lumière, pour que l'œil puisse supporter l'éclat des images. Pour comparer les indications théoriques, relatives à diverses méthodes d'observations, on peut admettre en conséquence que l'intensité, au bord géométrique, a été réduite, dans chaque cas particulier, à une valeur commune prise comme unité.

Nous sommes donc amenés à étudier non pas l'intensité absolue I,

mais le rapport $\frac{I}{I_B}$, ou, ce qui revient au même, d'après la formule (13), le rapport $\frac{K}{K_B}$, I_B et K_B étant les valeurs de I et de K au bord géométrique.

Désignons par J_i le rapport $\frac{I}{I_B}$ pour les points intérieurs au bord géométrique. On a, d'après les formules (12), (15), (31), (41),

$$(57)\quad J_i = \frac{\pi}{2}\,\frac{\sqrt{2(1+\alpha)}\sqrt{\frac{h}{\lambda}(\sin\varepsilon - \sin\varphi)} - \frac{1}{\sqrt{2\pi m}}}{1 - \frac{\pi}{2\sqrt{2\pi m}} + \frac{1}{16m}} \qquad \left(\alpha = \frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon} < 1\right),$$

avec une erreur relative de l'ordre de grandeur de

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(1+\alpha)}\left[2\pi\frac{h}{\lambda}(\sin\varepsilon - \sin\varphi)\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette expression de J_i n'a aucune signification pour $\alpha = 1$; mais elle est valable pour α voisin de 1 ou φ voisin de ε tant que le produit

$$\pi\frac{h}{\lambda}(\sin\varepsilon - \sin\varphi)$$

est un nombre suffisamment élevé, c'est-à-dire tant que l'erreur relative est suffisamment faible. Les termes négligés correspondent à des variations périodiques tellement faibles, par rapport à l'intensité générale, qu'il ne saurait être question d'en reconnaître l'existence par l'observation.

L'expression J_e de l'intensité relative à l'extérieur du bord géométrique, supposée réduite à l'unité sur le bord lui-même, s'obtient de même en partant des formules (12), (15), (32), (41). On a

$$(58)\quad J_e = \frac{1}{2\sqrt{2(1+\alpha)}\left[\sqrt{\alpha^2-1}+\alpha\right]\left[1 - \frac{\pi}{2\sqrt{2\pi m}} + \frac{1}{16m}\right]\sqrt{\frac{h}{\lambda}(\sin\varphi - \sin\varepsilon)}}$$

avec

$$\alpha = \frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon} > 1,$$

l'erreur relative étant de l'ordre de

$$\frac{\sqrt{\alpha+1}\left[\sqrt{\alpha^2-1}+\alpha\right]}{\sqrt{2\pi}\left[2\pi\frac{h}{\lambda}(\sin\varphi-\sin\varepsilon)\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Comme précédemment, les termes négligés correspondent à des variations périodiques insensibles par rapport à l'intensité générale. L'expression de J_e n'a d'ailleurs pas de sens pour $\alpha = 1$ ou $\varphi = \varepsilon$. Elle est applicable, lorsque α est voisine de 1, quand le produit

$$\frac{\pi h}{\lambda}(\sin\varphi - \sin\varepsilon)$$

est assez élevé, c'est-à-dire lorsque l'erreur relative est suffisamment petite.

ε étant petit $\left(\frac{1}{230}\text{ pour le Soleil}\right)$ si l'on s'éloigne du bord géométrique de quantités qui ne dépassent pas l'ordre de grandeur de ε, on peut remplacer, dans les formules (57) et (58), $\sin\varepsilon - \sin\varphi$ par $\varepsilon - \varphi$. L'erreur relative commise est entièrement négligeable.

Comme m est un nombre considérable, la partie principale de J_i est, d'après la formule (57),

$$\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}\sqrt{\frac{h}{\lambda}}\psi,$$

en appelant ψ la distance angulaire au bord géométrique du point, intérieur à ce bord, où l'on veut avoir l'intensité. Cela étant, considérons deux points M′, M″, intérieurs à l'image géométrique, caractérisés par les valeurs α', ψ' et α'', ψ''.

Le rapport des intensités, en ces points, est

$$\frac{J_i'}{J_i''} = \sqrt{\frac{1+\alpha'}{1+\alpha''}}\sqrt{\frac{\psi'}{\psi''}}.$$

Il est fini, sans être petit ni élevé, si ψ' et ψ'' sont du même ordre de grandeur. Par exemple, si $\psi'' < \psi' < 2\psi''$, le premier facteur est compris entre 1 et $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et le second entre 1 et $\sqrt{2}$; $\frac{J_i'}{J_i''}$ est par suite compris

entre $\sqrt{2}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Il n'y a donc pas de chute rapide d'intensité à l'intérieur du bord géométrique tant que la formule (57) est valable, c'est-à-dire tant que l'on n'est pas trop près du bord géométrique.

La valeur principale de l'intensité J_e, à l'extérieur du bord géométrique, tiré de la formule (58), est

$$\frac{1}{2\sqrt{2(\alpha+1)}\left(\sqrt{\alpha^2-1}+\alpha\right)\sqrt{\frac{h}{\lambda}\psi}}.$$

Elle conduit, comme ci-dessus, à la conclusion que le rapport des intensités en deux points extérieurs au bord géométrique est finie, sans être grande ni petite, du moment où les distances angulaires de ces points au bord sont suffisantes et du même ordre de grandeur.

Il n'y a donc pas, plus que tout à l'heure, de chute rapide d'intensité à l'extérieur du bord géométrique, tant que la formule (58) est valable, c'est-à-dire tant que l'on n'est pas trop près du bord géométrique.

Voyons maintenant ce qui se passe de part et d'autre du bord géométrique. Considérons un point, à l'extérieur du bord géométrique, à une petite distance angulaire ψ de ce bord, et un second point, à l'intérieur, à la même distance angulaire ψ. Le rapport α étant sensiblement égal à 1 dans les deux cas, on a

$$\frac{J_e}{J_i} = \frac{1}{4\pi\frac{h}{\lambda}\psi}.$$

Comme les expressions dont nous sommes partis sont supposées valables, le produit $\pi\frac{h}{\lambda}\psi$ a une valeur élevée. Il y a donc alors une chute rapide d'intensité quand on passe du point intérieur au bord géométrique au point extérieur, et cette chute est d'autant plus importante, pour une même valeur de ψ, que la longueur h de la fente est plus grande.

Comme exemple, supposons que les radiations admises dans l'œil aient pour longueur d'ondes $0^{\mu},5$ et considérons le cas d'une fente de longueur égale à 1^{m}. Le rapport obtenu en divisant la valeur de l'intensité, à $3''$ du bord géométrique, en un point intérieur, par l'intensité, à $1''$, en un point situé également à l'intérieur du bord

géométrique, a pour valeur $\sqrt{3}$. A l'extérieur du bord géométrique, le même rapport, pour deux points situés à 1″ et à 3″ de ce bord, est égal à $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Enfin le rapport obtenu en divisant l'intensité, en un point intérieur au bord géométrique, à 1″ de ce bord, par l'intensité en un point extérieur, situé aussi à 1″ de ce même bord, monte à 125.

La chute rapide d'intensité, quand on traverse le bord géométrique, donne à l'observateur l'impression de l'existence d'un bord véritable à l'image fournie par la lunette bien que, mathématiquement parlant, il n'y ait pas de discontinuité. Ce bord apparent, auquel on peut donner le nom de *bord optique*, est d'autant plus tranché, d'après ce que l'on a vu ci-dessus, que h a une valeur plus grande. Pour avoir un bord optique aussi net que possible, il faut donc avoir recours à une lunette de grande ouverture.

Quand on s'éloigne du bord géométrique, dans les deux sens, l'intensité croît beaucoup plus vite, à l'intérieur de ce bord, qu'elle ne décroît, à l'extérieur. Cette propriété résulte immédiatement de l'égalité, dans laquelle $\psi < \varepsilon$,

$$\frac{J_i - 1}{1 - J_e} = \pi \sqrt{1 - \frac{\psi}{2\varepsilon}} \sqrt{\frac{h}{\lambda}} \psi + \ldots,$$

que l'on obtient en partant des formules (54) et (57).

A l'extérieur du bord géométrique, l'intensité J_e décroît rapidement quand on s'en éloigne. A une distance du bord égale à ε, c'est-à-dire pour $\psi = \varepsilon$, $\varphi = 2\varepsilon$, $\alpha = 2$, elle est inférieure à $\frac{1}{2\sqrt{2\pi m}}$. Elle est donc très faible.

Par contre, à l'intérieur du bord géométrique, l'intensité J_i croît, en se rapprochant du centre, et prend la valeur $\frac{1}{2}\sqrt{2\pi m}$ en ce point. Elle est donc beaucoup plus élevée qu'au bord lui-même. Cette particularité pouvait être prévue, *a priori*, en se fondant sur un résultat bien connu de la théorie de la diffraction. L'image d'un point lumineux situé à l'infini, au foyer d'une lunette diaphragmée par une fente, est une traînée lumineuse d'autant plus allongée que la fente est plus étroite et d'autant plus mince que la fente est plus longue. Il en résulte que tous les points du disque solaire, disposés sur une même corde, perpendiculaire à la direction de la longueur de la fente, très fine par hypothèse, fournissent un appoint à l'intensité observée, dans le

champ, au point coïncidant avec l'image géométrique du milieu de la corde. L'intensité au centre de l'image focale du Soleil, auquel correspond la corde maximum du disque, doit donc être très supérieure à celle que l'on observe près du bord géométrique, à l'intérieur, région du champ à laquelle correspond des cordes du disque de longueurs très réduites.

Quand on ouvre légèrement la fente, les traînées lumineuses fournies par chacun des points, disposés sur une même corde, diminuent de longueurs. L'effet signalé doit, en conséquence, perdre rapidement de l'importance au centre de l'image, tandis qu'il ne peut être sensiblement modifié, dans le voisinage du bord géométrique, tant que la largeur de la fente reste au-dessous de quelques millimètres, les cordes très courtes continuant alors à agir efficacement, en entier, sur l'intensité de la région du champ où porte l'observation, tandis qu'il n'en est plus de même pour les cordes longues. Ce raisonnement ne permet pas de prévoir les modifications d'aspect du bord de l'image, quand on écarte les lèvres de la fente. Cette question complexe nécessite une étude particulière qui fera l'objet d'un autre Mémoire.

L'étude de l'intensité, dans le voisinage immédiat du bord géométrique, ne peut pas être abordée en partant des expressions de J_i et de J_e qui n'ont plus alors de signification. Il faut alors recourir à un développement, suivant les puissances de

$$\alpha = 1 - \frac{\sin\zeta - \sin\varepsilon}{\sin\varepsilon},$$

qui se déduit des formules (41) et (56).

En posant alors

$$(59) \qquad J_B = \frac{I}{I_B} = 1 + \sum_{p=1}^{p=\infty} A_p \left[2\pi \frac{h}{\lambda} (\sin\zeta - \sin\varepsilon) \right]^p,$$

on a, en tenant compte de l'égalité $m = \pi \frac{h \sin\varepsilon}{\lambda}$,

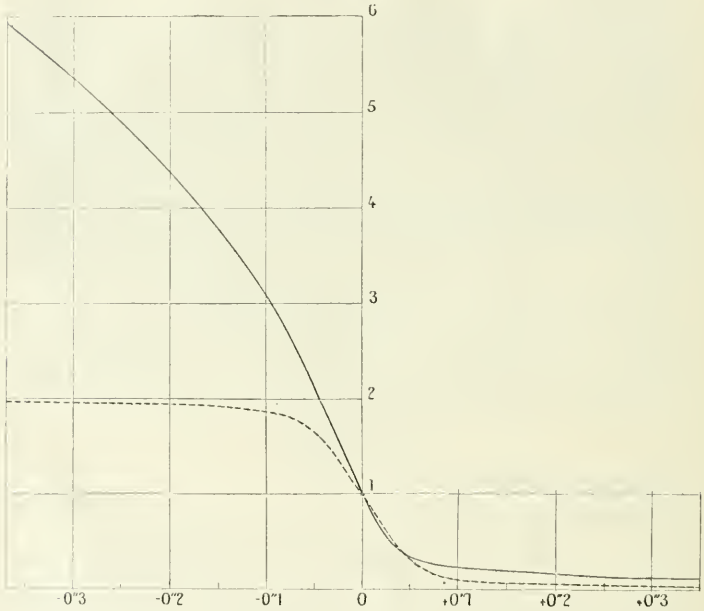
$$A_p = \frac{-\cos p\frac{\pi}{2} - \sin p\frac{\pi}{2} + \frac{3}{16m}\frac{2p+1}{2p-3}\left(\cos p\frac{\pi}{2} - \sin p\frac{\pi}{2}\right)}{1 - \frac{\pi}{2\sqrt{2\pi m}} + \frac{1}{16m}} \frac{1}{4p^2 - 1 \, 1.2.\ldots p},$$

avec une erreur relative de l'ordre de $\frac{1}{m^3}$, sur A_p.

Le développement (59) est, en principe, valable quelle que soit la

valeur du produit $2\pi\frac{h}{l}(\sin\zeta - \sin\varepsilon)$. Mais il n'est pratiquement applicable que lorsque ce produit ne dépasse pas quelques unités; c'est-à-dire, en raison de la grandeur du facteur $\frac{h}{l}$, lorsque la différence $\zeta - \varepsilon$ est suffisamment petite. Fort heureusement, les expres-

Fig. 15.



sions asymptotiques (57) et (58) de J_i et de J_e conviennent sitôt que l'on ne se trouve plus dans le voisinage immédiat du bord géométrique.

Par exemple, pour $h = 1^m$, les résultats numériques, tirés de la formule (59), coïncident avec ceux que l'on déduit des formules (57) et (58), dès que l'on ne se rapproche pas à plus de $0'',15$ du bord géométrique. Dans ces conditions, les termes les plus importants de la série ne dépassent pas quelques unités. Ces termes, affectés d'une

erreur relative très petite, sont donc connus avec une erreur absolue négligeable. Il en est de même si l'on remplace, dans chacun d'eux, la différence $\sin\varphi - \sin\varepsilon$ par $\varphi - \varepsilon$.

La courbe, représentée (*fig.* 15), fournit les variations de l'intensité relative, dans le voisinage du bord géométrique, où elle est supposée ramenée à l'unité. Les distances angulaires au bord géométrique sont prises comme abscisses et comptées positivement vers l'extérieur de l'image, négativement vers l'intérieur. L'unité graphique choisie correspond au dixième de seconde. La courbe se rapporte à une longueur de fente égale à 1^{m} [1] et à la longueur d'onde $\lambda = 0^{\mu},5$ des radiations les plus visibles du spectre. La valeur adoptée du demi-diamètre solaire est $\varepsilon = 16'$. On a, dans ces conditions,

$$\log m = 4,466026;$$

$$\log 2\pi\frac{h}{\lambda} = 7,099210.$$

m dépasse 29243 et $2\pi\frac{h}{\lambda}$ le nombre 12566370.

Le Tableau suivant donne les valeurs numériques des premiers coefficients de la série (59) exprimées par leurs logarithmes; les signes des nombres sont placés après les logarithmes.

TABLEAU I.

$A_1 = \bar{1},524467-$	$A_2 = \bar{2},524458+$	$A_3 = \bar{3},679381+$	$A_4 = \bar{4},820036-$
$A_5 = \bar{5},926781-$	$A_6 = \bar{6},988920+$	$A_7 = \bar{6},009130+$	$A_8 = \bar{8},989528-$
$A_9 = \bar{9},932630-$	$A_{10} = \bar{10},840854+$	$A_{11} = \bar{11},716493+$	$A_{12} = \bar{12},561585-$
$A_{13} = \bar{13},378012-$	$A_{14} = \bar{14},167420+$	$A_{15} = \bar{16},931336+$	$A_{16} = \bar{17},671094-$
$A_{17} = \bar{18},387945-$	$A_{18} = \bar{19},082979-$	$A_{19} = \bar{21},757235-$	$A_{20} = \bar{22},411616-$
$A_{21} = \bar{23},047000-$	$A_{22} = \bar{25},664112+$	$A_{23} = \bar{26},263792+$	$A_{24} = \bar{28},846590-$
$A_{25} = \bar{29},413184-$	$A_{26} = \bar{31},964126+$	$A_{27} = \bar{32},499973+$	$A_{28} = \bar{33},021212-$
$A_{29} = \bar{35},528329-$	$A_{30} = \bar{36},021749+$	$A_{31} = \bar{38},501903+$	$A_{32} = \bar{40},969165-$

En partant de ces valeurs et des expressions (57) et (58) de J_i et de J_e, on a obtenu les valeurs suivantes de l'intensité, celle du bord géométrique étant prise comme unité :

---

[1] On verra plus loin comment on peut passer de la courbe, construite pour $h = 1^{m}$, à celle qui correspond à une longueur de fente quelconque.

TABLEAU II.

Distance angulaire au bord géométrique.	Intensité au bord géométrique à l'intérieur.	Intensité au bord géométrique à l'extérieur.
0,00	1,000	1,000
0,01	1,215	0,810
0,02	1,448	0,649
0,03	1,689	0,521
0,04	1,936	0,424
0,05	2,164	0,357
0,06	2,386	0,312
0,07	2,591	0,286
0,08	2,779	0,270
0,09	2,951	0,260
0,10	3,109	0,253
.....	.....	.....
0,15	3,799	0,208
0,20	4,390	0,180
0,25	4,905	0,161
0,30	5,374	0,147
0,35	5,805	0,136
0,40	6,206	0,127
0,45	6,582	0,120
0,50	6,938	0,114
0,55	7,277	0,108
0,60	7,600	0,104
0,65	7,911	0,100
0,70	8,209	0,096
0,75	8,497	0,093
0,80	8,776	0,090
0,85	9,047	0,087
0,90	9,308	0,085
0,95	9,564	0,083
1,00	9,812	0,080

La courbe tracée en trait plein, sur la figure 15, a été obtenue en partant de ces nombres.

La courbe, tracée en pointillé, représente les variations correspondantes de l'intensité, dans le voisinage du bord géométrique solaire, dans le cas d'une lunette d'ouverture circulaire de diamètre égal à la longueur de la fente. Le point correspondant au bord géométrique est centre de la courbe. L'intensité passe de 1 à 2, quand on quitte ce bord, pour se rapprocher du centre, et de 1 à 0, quand on s'en éloigne,

à l'extérieur. Cette seconde courbe a été construite en partant des Tables numériques de Struve, fournissant les valeurs de l'intensité près du bord d'une image solaire, obtenue au foyer d'une lunette d'ouverture circulaire [1].

Dans ces Tables, l'intensité au bord géométrique est prise égale à $\frac{1}{2}$. Les nombres doivent donc être doublés quand on prend cette intensité pour unité, comme nous l'avons fait. On entre d'ailleurs dans les Tables, avec l'argument $\frac{\pi h}{\lambda}(\varepsilon - \varphi)$, $\varepsilon - \varphi$ étant la distance angulaire au bord géométrique, exprimée en arc. et h le diamètre de l'objectif.

D'après les courbes de la figure 15, l'intensité croît plus vite, vers l'intérieur du bord géométrique, lorsque l'accès de la lumière, dans la lunette, est limité par une fente, de longueur égale au diamètre de son objectif, qu'en l'employant à toute ouverture. A l'extérieur du bord géométrique, elle décroît d'abord plus rapidement dans le premier cas; mais l'inverse se produit ensuite. L'intensité diminue plus vite, pour l'ouverture circulaire, dès que l'on s'éloigne du bord géométrique à plus de $0^{\prime\prime},04$.

La considération des courbes de la figure 15 permet de se rendre compte que le bord géométrique de l'image solaire, au foyer d'une lunette, est mieux caractérisé en diaphragmant l'objectif par une fente étroite qu'en l'employant à toute ouverture. Cette propriété résulte des remarques suivantes :

On sait que l'œil ne discerne les détails, à la surface d'un objet, qu'autant qu'ils s'aperçoivent sous un angle dépassant une certaine limite σ [2]. Il en résulte que l'éclat, en un point d'une image focale,

---

(1) Ch. André, *Traité d'Astronomie stellaire*, t. I, p. 34.

(2) Voici un moyen simple de se rendre compte de l'ordre de grandeur de cette imperfection. On perce trois petits trous d'aiguille, disposés aux sommets d'un triangle équilatéral, de 2^{mm} de côté, dans une feuille de papier noir que l'on éclaire par derrière. Examinant les trois points lumineux ainsi constitués, à quelques mètres de distance, on aperçoit une source lumineuse unique qui paraît ronde. En se rapprochant graduellement, il arrive un moment où la source, tout en paraissant unique, présente un aspect rappelant la forme triangulaire. Ce n'est qu'en s'avançant davantage que l'on finit par distinguer nettement les trois points lumineux séparés les uns des autres. Mesurant la distance extrême à laquelle on commence à se rendre compte de la véritable nature de la source, on peut en déduire l'ordre de grandeur de σ.

examinée à travers l'oculaire d'une lunette, est proportionnel à la quantité de lumière émise par un élément de surface, décrit autour de ce point et vu par l'observateur sous l'angle σ, avec le grossissement employé. Considérons, en particulier, l'image solaire, au foyer d'une lunette, et prenons, de part et d'autre du bord géométrique, deux éléments de surface contigus qui se voient chacun sous l'angle σ, à travers l'oculaire. L'éclat, de chaque côté du bord géométrique, dépend de la quantité de lumière émise par chacun des éléments considérés. Le rapport R, obtenu en divisant la quantité de lumière émise par l'élément intérieur au bord géométrique, par celle qui émane de l'élément extérieur, peut servir à caractériser le contraste lumineux de part et d'autre du bord géométrique.

S'il n'y avait pas de lumière à l'extérieur du bord géométrique, R serait infini et ce bord serait parfaitement délimité. S'il y avait au contraire égalité de lumière de part et d'autre du bord géométrique, R serait égal à 1 et il n'y aurait aucun contraste. Le contraste est d'autant plus marqué que R est plus élevé.

Reportons-nous maintenant à la figure 15. Suivant le grossissement employé, l'angle σ correspond à une étendue angulaire plus ou moins faible de l'image focale. En conséquence, il convient de calculer le rapport R en donnant successivement diverses valeurs angulaires aux éléments lumineux pris de part et d'autre du bord géométrique. Que la lunette travaille à pleine ouverture ou soit diaphragmée par la fente, la quantité de lumière émise par l'élément intérieur au bord est représentée par l'aire comprise entre la courbe correspondante, l'axe des abscisses, l'ordonnée à l'origine et l'ordonnée ayant pour abscisse la largeur angulaire de l'élément. De même la quantité de lumière émise par l'élément extérieur au bord géométrique est figurée par l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses, l'ordonnée à l'origine et l'ordonnée symétrique de celle qui a été considérée pour l'élément intérieur.

Le Tableau III donne les valeurs du rapport R, correspondant à la fente et à l'ouverture entière de l'objectif, dans l'hypothèse où un détail sous-tendant 0″,1, 0″,2, 0″,3, etc., sur la surface solaire, s'aperçoit sous l'angle σ, avec le grossissement employé.

TABLEAU III.

	Valeurs de R	
	pour la fente.	pour l'ouverture circulaire.
0,1	4,40	3,88
0,2	8,56	7,18
0,3	12,91	10,19
0,4	17,25	12,98
0,5	21,40	15,84
0,6	25,58	18,42
0,7	29,72	20,94
0,8	33,84	23,35
0,9	37,99	25,67
1,0	42,12	27,90

Les valeurs de R, dans le cas de la fente, sont toutes supérieures à celles qui correspondent à l'ouverture circulaire. Le contraste lumineux, de part et d'autre du bord géométrique, est, en conséquence, plus marqué, quand on diaphragme l'objectif d'une lunette par une fente étroite de longueur égale à son diamètre, qu'en l'employant à pleine ouverture.

Les nombres dont nous sommes partis, pour établir ce résultat, se rapportent à une lunette de 1^m d'ouverture, mais il est facile de l'étendre à une ouverture quelconque.

Dans le voisinage du bord géométrique, α est, en effet, très voisin de 1 et comme m est très grand on a sensiblement, d'après les formules (57) et (58),

$$J_i = \pi\sqrt{\frac{h}{\lambda}(\varepsilon - \varrho)},$$

$$J_e = \frac{1}{4\sqrt{\frac{h}{\lambda}(\varrho - \varepsilon)}};$$

d'autre part le coefficient A_p, qui rentre dans la formule (59), se réduit sensiblement à

$$A_p = \frac{\cos p\frac{\pi}{2} + \sin p\frac{\pi}{2}}{\sqrt{p^2 - 1}} = \frac{1}{1.2\ldots p},$$

les erreurs relatives commises étant toutes très petites.

Il s'ensuit que J_i, J_e, J_R ne dépendent que du produit $\frac{h}{\lambda}(\varepsilon - \varrho)$ quand

on consent à commettre de faibles erreurs relatives. La courbe qui se rapporte à une fente de longueur h' est donc extrêmement voisine de celle que l'on obtient en multipliant, par $\frac{h}{h'}$, la graduation de l'échelle des abscisses de la courbe relative à la fente de longueur h, les ordonnées restant les mêmes. La courbe relative à une ouverture circulaire de diamètre h' s'obtient de la même manière, en partant de celle qui se rapporte au diamètre h, les Tables de Struve dépendant uniquement de l'argument $\pi \frac{h}{\lambda}(\varepsilon - \varepsilon_1)$.

Les courbes tracées figure 15 se rapportant à $h = 1^m$, la longueur représentant l'abscisse $0'',1$, sur cette figure, correspond donc :

A l'abscisse	$1'',00$	pour une lunette de	$0^m,10$	d'ouverture
»	$0,50$	»	$0,20$	»
»	$0,20$	»	$0,50$	»
»	....	»	....	»

On peut dire aussi que les courbes tracées (*fig.* 15) se rapportent à une lunette d'ouverture quelconque, à condition de représenter graphiquement son pouvoir séparateur par l'abscisse marquée $0'',1$, sur ladite figure, cet angle étant la valeur même du pouvoir séparateur d'une lunette de 1^m d'ouverture.

D'après le Tableau III, le rapport R, dans le cas de la fente de 1^m, est toujours supérieur à celui qui lui correspond, dans le cas de l'ouverture circulaire. Cette propriété reste inaltérée, quand on modifie l'échelle des abscisses, sans toucher à celle des ordonnées, c'est-à-dire quand on passe de la fente de longueur égale à 1^m et de l'ouverture circulaire de même diamètre à une fente et à une ouverture circulaire de longueur et de diamètre différents.

La conclusion à laquelle nous sommes arrivés plus haut, dans le cas d'une fente de 1^m, concernant le contraste lumineux, de part et d'autre du bord géométrique de l'image solaire, au foyer d'une lunette, cette conclusion, dis-je, est donc indépendante de l'ouverture de l'instrument.

VIII.

On sait que les images des étoiles, au foyer d'une lunette, augmentent de finesse quand on masque la partie centrale de l'objectif avec un écran circulaire. Cet avantage est, au contraire, inexistant, pour les astres à grands diamètres, tels que le Soleil. La netteté des

bords de l'image décroît même à mesure que le rayon de l'écran augmente.

Il est naturel, en conséquence, de se demander quel genre de modification subit le bord de l'image solaire obtenue au foyer d'une lunette diaphragmée par une fente très étroite, lorsqu'on en masque la partie centrale. Nous nous proposons d'élucider cette question, pour terminer le présent travail, en nous bornant à examiner ce qui se passe aux points du bord de l'image situés à la rencontre de l'axe de symétrie parallèle au sens de la longueur de la fente.

D'après les notations adoptées au paragraphe II, le mouvement vibratoire émanant d'un élément $\sin\psi\, d\omega\, d\psi$ de la source, dans la direction (ω, ψ), et diffracté, dans la direction (θ, φ), par une fente de longueur h, arrive dans le plan focal avec la vitesse

$$GXah \sin 2\pi\left(\frac{t-\tau}{T} - \frac{q}{\lambda}\right),$$

X étant donné par la formule (11). Lorsque la largeur de la fente est très petite, et quand on examine ce qui se passe uniquement le long de l'axe de symétrie de l'image parallèle à la longueur de la fente, dont la direction correspond à $\theta = \frac{\pi}{2}$, l'expression de la vitesse, à la distance angulaire φ du centre, se réduit à

$$Ga \frac{\sin \pi h \frac{\sin\varphi - \sin\psi \sin\omega}{\lambda}}{\pi \frac{\sin\varphi - \sin\psi \sin\omega}{\lambda}} \sin 2\pi\left(\frac{t-\tau}{T} - \frac{q}{\lambda}\right).$$

Quand on masque la partie centrale de la fente par un écran de longueur l, cette vitesse devient

$$Ga \frac{\sin \pi h \frac{\sin\varphi - \sin\psi \sin\omega}{\lambda} - \sin \pi l \frac{\sin\varphi - \sin\psi \sin\omega}{\lambda}}{\pi \frac{\sin\varphi - \sin\psi \sin\omega}{\lambda}} \sin 2\pi\left(\frac{t-\tau}{T} - \frac{q}{\lambda}\right).$$

En posant

$$X' = \frac{\sin \pi \frac{h-l}{2} \frac{\sin\varphi - \sin\psi \sin\omega}{\lambda}}{\pi \frac{h-l}{2} \frac{\sin\varphi - \sin\psi \sin\omega}{\lambda}} \cos \pi \frac{h+l}{2} \frac{\sin\varphi - \sin\psi \sin\omega}{\lambda},$$

cette expression peut s'écrire

$$GX = a(h - l)\sin 2\pi\left(\frac{t - \tau}{T} - \frac{q}{k}\right).$$

Il en résulte que l'intensité lumineuse, émanant de l'élément de la source situé dans la direction GO (*fig.* 8) et arrivant au point Q, défini au paragraphe II, peut se représenter par l'expression

$$2b^2 a^2 (h - l)^2 X^2 \sin\psi \, d\psi \, d\omega.$$

Intégrant le long de la surface de l'astre, posant

$$\frac{\pi}{k}\frac{h + l}{2}\sin\varepsilon = m',$$

$$\frac{h - l}{h + l} = \rho,$$

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon} = \alpha$$

et faisant le changement de variable défini par les relations (16), on trouve finalement que l'intensité, dans la direction φ, est proportionnelle à l'expression

$$K = \int_{-1}^{+1} [\cos m'(u - \alpha)]^2 \left[\frac{\sin\rho m'(u - \alpha)}{\rho m'(u - \alpha)}\right]^2 \sqrt{1 - u^2}\, du,$$

qui se confond avec celle de K [formule (19)], pour $l = 0$ ou $\rho = 1$, m' étant alors égal à $\frac{m}{2}$.

Or on a l'identité

$$(\sin A \cos B)^2 = \frac{\sin^2(A + B) + \sin^2(A - B) + 2\sin^2 A - 2\sin^2 B}{4}.$$

On peut écrire, en conséquence,

$$\begin{aligned} 4K = {} & \left(\frac{\rho + 1}{\rho}\right)^2 \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - u^2}\left[\frac{\sin m'(\rho + 1)(u - \alpha)}{m'(\rho + 1)(u - \alpha)}\right]^2 du \\ & + \left(\frac{\rho - 1}{\rho}\right)^2 \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - u^2}\left[\frac{\sin m'(\rho - 1)(u - \alpha)}{m'(\rho - 1)(u - \alpha)}\right]^2 du \\ & - \frac{2}{\rho} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - u^2}\left[\frac{\sin m'\rho(u - \alpha)}{m'\rho(u - \alpha)}\right]^2 du \\ & - \frac{2}{\rho^2} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - u^2}\left[\frac{\sin m'(u - \alpha)}{m'(u - \alpha)}\right]^2 du. \end{aligned}$$

Supposons ρ différent de 0 et de 1. Les intégrales figurant dans cette formule sont de même forme que K [formule (9)]. Il en résulte qu'au bord géométrique de l'image, pour lequel $\alpha = 1$, on a, d'après les formules (41) et (45), en ne conservant que les termes les plus importants,

$$4K_B = \sqrt{\frac{2\pi}{m'^3}}\left[\left(\frac{\rho+1}{\rho}\right)^2 \frac{1}{(\rho+1)^2} + \left(\frac{1-\rho}{\rho}\right)^2 \frac{1}{(1-\rho)^2} + \frac{2}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2}\right],$$

$$4\left(\frac{dK'}{d\alpha}\right)_B = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2\pi}{m'}}\left[\left(\frac{\rho+1}{\rho}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{\rho+1}} + \left(\frac{1-\rho}{\rho}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-\rho}} + \frac{2}{\sqrt{\rho}} - \frac{2}{\rho^2}\right],$$

et, par suite,

$$\left(\frac{\frac{dK}{d\alpha}}{K'}\right)_B = -\frac{2m'}{3}\,\frac{(1+\rho)^{\frac{3}{2}} + (1-\rho)^{\frac{3}{2}} + 2\rho^{\frac{3}{2}} - 2}{\sqrt{1+\rho} + \sqrt{1-\rho} + 2\sqrt{\rho} - 2}.$$

Le second nombre de cette dernière égalité est proportionnel au coefficient angulaire de la tangente à la courbe figurant les variations du rapport $\frac{K'}{K'_B}$, c'est-à-dire de l'intensité relative, au point correspondant au bord géométrique, quand on prend comme unité l'intensité en ce point.

Or la fonction de ρ qui accompagne le facteur $-\frac{2m'}{3}$ croît de 0 à 2, lorsque ρ croît de 0 à 1. La plus grande valeur absolue du second membre correspond donc à $\rho = 1$, c'est-à-dire au cas où le volet qui masque la partie centrale de la fente a une largeur nulle.

La variation de l'intensité relative, dans le voisinage immédiat du bord géométrique, est donc plus rapide en utilisant la totalité de la fente qu'en en masquant la partie centrale. En conséquence, on ne peut que diminuer la netteté du bord de l'image solaire, en obturant la partie centrale de la fente.

Cependant les formules utilisées, pour établir ce résultat, supposent le produit $m'(1-\rho)\frac{\pi l \sin\varepsilon}{\lambda}$ élevé. La démonstration tombe en défaut si la largeur l de l'écran central descend à une fraction de millimètre. Nous ne nous attarderons pas à étudier ce cas particulier.

Problèmes de Géométrie arithmétique;

PAR HARRIS HANCOCK,

Professeur à l'Université de Cincinnati (États-Unis).

1. Par *géométrie arithmétique* ou *géométrie des nombres* nous désignons la théorie où des théorèmes numériques sont inspirés, expliqués, illustrés ou dérivés moyennant des notions géométriques. La théorie peut se borner aux nombres naturels rationnels ou entiers, ou elle peut s'étendre aux nombres algébriques ou transcendants, y compris la théorie de Minkowski.

Dans la théorie des nombres de Gauss, les problèmes s'occupent de nombres entiers, que l'on considère généralement à l'égard d'un entier (un module), de sorte que la notion fondamentale est une comparaison de deux nombres. Ces nombres peuvent se représenter par les coordonnées de points dans un plan, l'une d'elles étant un entier fixe, l'autre un entier variable.

Une généralisation de cette idée, par laquelle le domaine général des nombres naturels est étendu, est une comparaison de trois entiers ou plus, d'une telle façon que les rapports entre plusieurs entiers (une théorie dont Kronecker s'est jusqu'à un certain point rapproché) peuvent s'exprimer par les coordonnées de points dans un espace de trois dimensions ou d'un nombre de dimensions encore plus élevé.

Les problèmes que nous proposerons dans ce Mémoire s'occupent des nombres naturels entiers. On peut souvent compter combien de fois un phénomène peut arriver dans une construction géométrique fixe. Quand ce calcul peut s'effectuer de deux manières sans aboutir à des formules identiques, l'équation qui égalise les deux procédés offre comme règle un théorème intéressant dans la théorie des nombres naturels. On regarde comme géométrie élémentaire arithmétique la méthode suivie pour aboutir à de tels résultats.

2. On emploie le symbole $(a, b, c, \ldots)$ pour désigner le diviseur commun, le plus grand des entiers $a, b, c, \ldots$. Il est clair que $(a, b, c, \ldots)$ reste invariable quand les éléments s'échangent les uns avec les autres; par exemple $(6, 9, 15)$ équivaut à 3 et peut s'écrire

$$(6, 9, 15) \sim 3 \sim (9, 6, 15) \sim (15, 9, 6) \sim (15, 6, 9).$$

Qu'on songe à l'infinité de nombres triples (ξ, η, ζ), où

$$\xi = 1, 2, 3, \ldots; \qquad \eta = 1, 2, 3, \ldots; \qquad \zeta = 1, 2, 3, \ldots,$$

comme on les écrit dans la Table suivante :

(1, 1, 1),	(1, 1, 2),	(1, 1, 3),	(1, 1, 4),	...,
(1, 2, 1),	(1, 2, 2),	(1, 2, 3),	(1, 2, 4),	...,
(1, 3, 1),	(1, 3, 2),	(1, 3, 3),	(1, 3, 4),	...,
.....,	.....,	.....,	.....,	...,
(2, 1, 1),	(2, 1, 2),	(2, 1, 3),	(2, 1, 4),	...,
(2, 2, 1),	(2, 2, 2),	(2, 2, 3),	(2, 2, 4),	...,
(2, 3, 1),	(2, 3, 2),	(2, 3, 3),	(2, 3, 4),	...,
.....,	.....,	.....,	.....,	...,
(3, 1, 1),	(3, 1, 2),	(3, 1, 3),	(3, 1, 4),	...,
.....,	.....,	.....,	.....,	...,
.....,	.....,	.....,	.....,	...,

Il est clair que si un octant dans un espace de trois dimensions, où les coordonnées sont toutes positives, est rempli de cubes-unités (c'est-à-dire de cubes dont les trois côtés ont une unité de longueur), les coordonnées des sommets de ces cubes résultent de la Table ci-dessus écrite.

Puisqu'il ne se trouve ni zéro ni fractions propres, posons $(1, 1, 1)$ comme coordonnées de l'origine. Quand on dit qu'un point est équivalent à t, et qu'on écrit $(\sim t)$, cela signifie que les trois coordonnées du point ont t comme plus grand commun diviseur; et l'on dira que les points sont équivalents quand leurs coordonnées ont le même plus grand commun diviseur.

Les sommets qui se trouvent à l'intérieur d'une construction géométrique et sur les faces de celle-ci peuvent s'appeler brièvement *des points de cette construction géométrique*.

3. Une des premières questions qui se soulèvent est celle-ci :

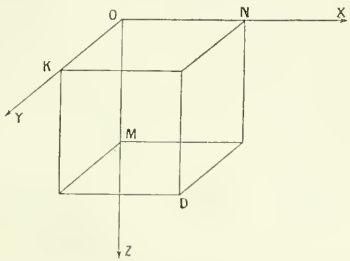
Combien de points y a-t-il dans un espace limité qui satisfont à des conditions données; par exemple, combien y a-t-il de points (ξ, η, ζ) *tels que*

$$(\xi, \eta, \zeta) \sim t,$$

où ξ, η, ζ *sont coordonnées d'un point, et où* t *est un entier fixe?*

Comme cas simple, prenons comme espace borné le parallélépipède rectangulaire OD, dont les côtés sont $ON = n$, $OK = k$, $OM = m$,

Fig. 1.



les quantités n, k, m étant des nombres rationnels plus grands que 1, mais pas nécessairement des entiers.

Si N_t exprime le nombre des points, qui se trouvent au dedans du parallélépipède OD et sur ses faces, et qui sont équivalents à t, et si $\left[\frac{a}{b}\right]$ signifie le plus grand entier dans $\frac{a}{b}$, il est certain que

$$N_t = \left[\frac{n}{t}\right]\left[\frac{k}{t}\right]\left[\frac{m}{t}\right] - \sum_p \left[\frac{n}{pt}\right]\left[\frac{k}{pt}\right]\left[\frac{m}{pt}\right]$$
$$+ \sum_{p, p_1} \left[\frac{n}{pp_1 t}\right]\left[\frac{k}{pp_1 t}\right]\left[\frac{m}{pp_1 t}\right] - \ldots,$$

où p, p_1, ... sont des entiers premiers qui diffèrent les uns des autres.

Nous pouvons écrire cette formule brièvement

$$N_t = \sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left[\frac{n}{dt}\right]\left[\frac{k}{dt}\right]\left[\frac{m}{dt}\right],$$

où ε_d sont des coefficients de Möbius (*voir* par exemple, le *Journal de Crelle*, t. 77, p. 289). Cette formule est donnée par Kronecker (*Vorlesungen über Zahlentheorie*, Bd. I, p. 307) pour le cas de deux dimensions.

4. *La fonction eulérienne.* — Le nombre des entiers inférieurs à l'entier n et premiers à celui-là est une fonction de n introduite par Euler (*Petr. Comm.*, VIII, 1760, p. 74) et dénotée par le symbole $\varphi(n)$ (*voir* Gauss, *Disq. Arith.*, § 38). Ce nombre est le même que le nombre des systèmes

$$(n, 1), \quad (n, 2), \quad \ldots, \quad (n, n-1),$$

qui équivalent à l'unité. Il est clair que ces systèmes peuvent se représenter par les points dans le plan x, y, où $x = n$; $y = 1, 2, \ldots, n-1$.

On sait que

$$\varphi(n) = n \prod \left(1 - \frac{1}{p}\right) = n - \sum \frac{n}{p} + \sum \frac{n}{pp_1} - \ldots;$$

ou

$$\varphi(n) = \sum_{\frac{d}{n}} \varepsilon_d \left[\frac{n}{d}\right],$$

où chez Kronecker le symbole $\frac{d}{n}$ signifie que d est un diviseur de n et que la sommation s'étend à tous les diviseurs de n, y compris l'unité et n.

5. Nous désignons le nombre de points

$$(n, 1), \quad (n, 2) \quad (n, 3), \quad \ldots, \quad (n, \lambda),$$

qui équivalent à l'unité par le symbole $r_\lambda(n)$, où λ et n sont des entiers.

Puisque $(n, n+k) \sim (n, k)$, si $\lambda = m - n + \nu$, où $\nu < n$, il s'ensuit que

$$r_\lambda(n) = m\varphi(n) + r_\nu(n).$$

Il est clair que

$$r_n(1) = n \qquad \text{et} \qquad r_n(n) = \varphi(n).$$

On trouve facilement que

$$r_\nu(n) = \sum_{\frac{d}{n}} \varepsilon_d \left[\frac{\nu}{d}\right].$$

6. *La fonction eulérienne généralisée* [1]. — Si i et k sont des entiers arbitraires, le nombre des systèmes

$$(1) \qquad (i, k, 1), \quad (i, k, 2), \quad (i, k, 3), \quad \ldots, \quad (i, k, i-1), \quad (i, k, i),$$

qui équivalent à l'unité, se dénote par $\Phi(i, k)$.

1° Si d est le plus grand commun diviseur de i et k, de sorte que $i = i_1 d$, $k = k_1 d$, où $(i_1, k_1) \sim 1$, la série des systèmes (1) peut s'écrire :

$$\begin{array}{lllll}
(d, 1), & (d, 2), & (d, 3), & \ldots, & (d, d), \\
(d, d+1), & (d, d+2), & (d, d+3), & \ldots, & (d, 2d), \\
(d, 2d+1), & (d, 2d+2), & (d, 2d+3), & \ldots, & (d, 3d), \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\
[d, (i_1-1)d+1], & [d, (i_1-1)d+2], & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & (d, i_1 d).
\end{array}$$

Il est clair que $\varphi(d)$ est le nombre des systèmes équivalant à l'unité dans chacune des lignes qu'on vient d'écrire, de sorte que

$$\Phi(i, k) = i_1 \varphi(d),$$

où $i = i_1 d$ et $k = k_1 d$ et $d \sim (k, i)$.

De même

$$\Phi(k, i) = k_1 \varphi(d).$$

Il s'ensuit que

$$k_1 \Phi(i, k) = i_1 \Phi(k, i).$$

Si $(i, k) \sim 1$, nous avons $\Phi(i, k) = i$ et nous avons aussi

$$\Phi(i, i) = \varphi(i).$$

2° Si $k = n + \sigma$, où σ est un entier positif quelconque, puisque

$$(n, k, m) \sim (n, n+\sigma, m) \sim (n, \sigma, m),$$

il s'ensuit que

$$\Phi(n, k) = \Phi(n, \sigma).$$

---

[1] Voir aussi *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 138, février 1914, p. 469.

En général, si $k = qn + \tau$, où $\tau < n$, on a

$$\Phi(n, k) = \Phi(n, \tau).$$

3° Si $(n, k) \sim 1$, on a

$$\Phi(mn, k) = \Phi(m, k)\Phi(n, k).$$

Car si $m = m_1 d$ et $k = k_1 d$, $(m_1, k_1) \sim 1$, à cause de 1°, on a

$$\Phi(mn, k) = m_1 n \varphi(d),$$
$$\Phi(m, k) = m_1 \varphi(d),$$
$$\Phi(n, k) = n.$$

On arrive à un résultat semblable si $(m, k) \sim 1$.

4° Puisque

$$\Phi(i, k) = i_1 \varphi(d) \qquad \text{et} \qquad \varphi(d) = d \prod \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

on voit que

$$\Phi(i, k) = i \prod \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \sum_{\substack{\delta \\ d}} \varepsilon_\delta \left[\frac{i}{\delta}\right],$$

où p s'étend à tous les facteurs premiers de d et $d \sim (i, k)$; et δ s'étend à tous les diviseurs de d.

7. On dénote par $R_\lambda(n, k)$ le nombre des systèmes

$$(n, k, 1), \quad (n, k, 2), \quad \ldots, \quad (n, k, \lambda),$$

qui équivalent à l'unité, où n, k, λ sont des entiers arbitraires.

Puisque

$$(n, k, nm + \nu) \sim (n, k, \nu) \qquad [\nu < n],$$

il est clair que, si $\lambda = nm + n$,

$$R_\lambda(n, k) = m\Phi(n, k) + R_\nu(n, k).$$

Et encore, si d est le plus grand commun diviseur de n et k, il résulte que les systèmes

$$(n, k, n + 1), \quad (n, k, n + 2), \quad \ldots, \quad (n, k, n + \lambda)$$

équivalent à

$$(d, 1), \quad (d, 2), \quad \ldots, \quad (d, \lambda).$$

Il s'ensuit que

$$R_\lambda(n, k) = r_\lambda(d), \qquad \text{où} \qquad (n, k) \sim d.$$

D'où il résulte (*voir* n° 5) que

$$R_\lambda(n, k) = \sum_{\substack{\delta \\ (n,k)}} \varepsilon_\delta \left[\frac{\lambda}{\delta}\right],$$

où λ, n, k sont des entiers arbitraires.

8. Que l'on considère ensuite le nombre de points (~ 1) qui se trouvent dans le carré que voici :

$$(\mathrm{N}) \quad \left\{ \begin{array}{lllll} (1, 1), & (2, 1), & (3, 1), & \ldots, & (n, 1), \\ (1, 2), & (2, 2), & (3, 2), & \ldots, & (n, 2), \\ (1, 3), & (2, 3), & (3, 3), & \ldots, & (n, 3), \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots, & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots, \\ (1, n), & (2, n), & (3, n), & \ldots, & (n, n). \end{array} \right.$$

Puisque $(i, k) \sim (k, i)$ on voit que le nombre de ces points, qui équivalent à l'unité, est

$$\mathrm{N} = 2 \sum_{j=1}^{j=n} \varphi(j) - 1,$$

où il faut observer qu'il y a un nombre égal de ces points-là de l'un et de l'autre côté de la diagonale. Il faut remarquer aussi que, dans la sommation, on a compté $\varphi(1)$ deux fois, tandis que dans la sommation des points de la diagonale $\varphi(1)$ se trouve une fois seulement.

Si N_1 indique le nombre des points (~ 1) au-dessous de la diagonale, on voit que

$$\mathrm{N} = 2\mathrm{N}_1 + 1.$$

Et encore, puisque $(2, 1) \sim (1, 1)$, $(3, 1) \sim (2, 1)$ et en général $(i, j) \sim (i - j, j)$, où $i > j$, on peut écrire les points au-dessous de

la diagonale de cette façon :

$$
\begin{array}{llllllll}
(1, 1), & (1, 2), & (1, 3), & \ldots, & (1, n-3), & (1, n-2), & (1, n-1), \\
(2, 1), & (2, 2), & (2, 3), & \ldots, & (2, n-3), & (2, n-2), & \\
(3, 1), & (3, 2), & (3, 3), & \ldots, & (3, n-3), & & \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots, & \ldots\ldots & \ldots, & & & \\
(n-3, 1), & (n-3, 2), & (n-3, 3), & & & & \\
(n-2, 1), & (n-2, 2), & & & & & \\
(n-1, 1), & & & & & &
\end{array}
$$

Si N_2 indique le nombre de points (~ 1) au-dessous de la deuxième diagonale, on observe que $N_1 = 2N_2 + 1$. On peut écrire les points au-dessous de cette diagonale de cette manière :

$$
\begin{array}{lllll}
(1, 1), & (1, 2), & (1, 3), & (1, 4), & \ldots\ldots \\
(2, 1), & (2, 2), & (2, 3), & (2, 4), & \ldots\ldots \\
(3, 1), & (3, 2), & (3, 3), & \ldots\ldots, & \ldots\ldots \\
(4, 1), & (4, 2), & (4, 3), & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
(5, 1), & (5, 2), & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
(6, 1), & (6, 2), & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots \\
(7, 1), & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
(8, 1), & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots & \ldots\ldots, & \ldots\ldots
\end{array}
$$

On observe que, quand $n = 4$,

$$N_2 = r_2(1);$$

quand $n = 6$,

$$N_2 = r_2(2) + r_2(1);$$

quand $n = 8$,

$$N_2 = r_2(3) + r_4(2) + r_6(1);$$

quand $n = 10$,

$$N_2 = r_2(4) + r_4(3) + r_6(2) + r_8(1);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

ou

$$N_2 = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\nu-1} r_{2+2\lambda}(\nu - \lambda), \qquad \text{où} \qquad 2\nu = n - 2.$$

Ainsi on arrive à (*voir* n° 3)

$$N_2 = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\nu-1} \sum_{\frac{d}{\nu-\lambda}} \varepsilon_d \left[\frac{2 + 2\lambda}{d}\right];$$

ou, si l'on écrit $\nu - \lambda = \mu$, il résulte que

$$N_2 = \sum_{\mu=1}^{\mu=\nu} \sum_{\frac{d}{\mu}} \varepsilon_d \left[\frac{n - 2\mu}{d}\right] \qquad (2\nu = n - 2).$$

De l'autre côté, quand $n = 3$,

$$N_2 = r_1(1);$$

quand $n = 5$,

$$N_2 = r_1(2) + r_3(1);$$

quand $n = 7$,

$$N_2 = r_1(3) + r_3(2) + r_5(1);$$

quand $n = 9$,

$$N_2 = r_1(4) + r_3(3) + r_5(2) + r_7(1);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ou

$$N_2 = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\nu-1} r_{1+2\lambda} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\nu-1} \sum_{\frac{d}{\nu-\lambda}} \varepsilon_d \left[\frac{1 + 2\lambda}{d}\right] = \sum_{\mu=1}^{\mu=\nu} \sum_{\frac{d}{\mu}} \varepsilon_d \left[\frac{n - 2\mu}{d}\right] \qquad (2\nu = n - 1).$$

Dans les deux cas, on voit que

$$N_2 = \sum_{i=1}^{i=d'} \varepsilon_d \left[\frac{n - 2id}{d}\right], \qquad \text{où} \qquad 2dd' = n;$$

ou

$$N_2 = \sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left[\frac{n}{2d}\right] \left\{ \left[\frac{n}{d}\right] - \left[\frac{n}{2d}\right] - 1 \right\}.$$

D'où il s'ensuit que

$$N = 3 + 4 \sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left[\frac{n}{2d}\right] \left\{ \left[\frac{n}{d}\right] - \left[\frac{n}{2d}\right] - 1 \right\} = \sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left[\frac{n}{d}\right]^2 = 2 \sum_{j=1}^{j=n} \varphi(j) - 1.$$

D'où il résulte aussi que

$$\sum_{j=1}^{j=n} \varphi(j) = 2 + 2 \sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left[\frac{n}{2d}\right] \left\{ \left[\frac{n}{d}\right] - \left[\frac{n}{2d}\right] - 1 \right\}.$$

Quand

$$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots,$$

on voit que

$$N = 1, 3, 7, 11, 19, 23, 35, 43, 55, 63, 83, 91, \ldots.$$

9. Si $k \neq n$ du paragraphe précédent, on écrit les points

$$\begin{array}{llll}
(1, 1), & (2, 1), & (3, 1), & \ldots \quad (n, 1), \\
(1, 2), & (2, 2), & (3, 2), & \ldots, \quad (n, 2), \\
(1, 3), & (2, 3), & (3, 3), & \ldots \quad (n, 3), \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, \quad \ldots\ldots, \\
(1, k), & (2, k), & (3, k), & \ldots, \quad (n, k).
\end{array}$$

Le nombre des points (~ 1) dans la ligne σ (où $\sigma \leq k$) est $r_n(\sigma)$, tandis que ce nombre dans la colonne τ (où $\tau \leq n$) est $r_k(\tau)$, de sorte que le nombre de points (~ 1) est

$$\sum_{\tau=1}^{\tau=n} r_k(\tau) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=k} r_n(\sigma) = \sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left[\frac{n}{d}\right] \left[\frac{k}{d}\right].$$

D'après le n° 5, on arrive au théorème appartenant à la théorie des nombres exprimé par la formule

$$\sum_{\tau=1}^{\tau=n} \sum_{\frac{d}{\tau}} \varepsilon_d \left[\frac{k}{d}\right] = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=k} \sum_{\frac{d}{\sigma}} \varepsilon_d \left[\frac{n}{d}\right] = \sum_{d=1}^{d=\infty} \left[\frac{n}{d}\right] \left[\frac{k}{d}\right].$$

Afin de vérifier cette formule, on remarque que le nombre des diviseurs, à savoir $\frac{d}{\nu}$ (où $\nu = 1, 2, \ldots, n$) se trouve de cette manière : qu'on écrive la série des nombres $1, 2, 3, \ldots, n-1, n$.

On voit que 2 se trouve $\left[\frac{n}{2}\right]$ fois comme diviseur, et que 3 se trouve $\left[\frac{n}{3}\right]$ fois comme diviseur, etc.

D'où il résulte que le nombre des diviseurs est

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \left[\frac{n}{\nu}\right] = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left[\frac{n}{\nu}\right].$$

La *somme* de ces diviseurs est

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left[\frac{n}{\nu}\right] \nu.$$

De la même façon on peut arriver au nombre des diviseurs (n, μ), où $\mu = 1, 2, \ldots, m$.

Posons

$$n = p_1^{h_1}, p_2^{h_2}, p_3^{h_3}, \ldots,$$

où $p_1, p_2, p_3, \ldots$ sont des entiers premiers. Puisque m acquiert les valeurs

$$1, 2, 3, \ldots; \quad p_1 - 1, p_1, p_{1+1}, \ldots; \quad 2p_1, \ldots, 3p_1, \ldots; \quad \left[\frac{m}{p_1}\right] p_1,$$

on voit que le nombre des diviseurs dans lesquels se trouve p_1 comme facteur est $\left[\frac{m}{p_1}\right]$ et le nombre des diviseurs dans lesquels se trouve p_1^2 comme facteur est $\left[\frac{m}{p_1^2}\right]$, etc.

Il résulte de là que le nombre de diviseurs désiré est

$$\sum \left[\frac{m}{p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} p_3^{\lambda_3} \ldots}\right]$$

$$(\lambda_1 = 0, 1, 2, \ldots, h_1; \lambda_2 = 0, 1, 2, \ldots, h_2; \lambda_3 = 0, 1, 2, \ldots, h_3; \ldots).$$

Si $m = n$, ce nombre est

$$\sum_{(\lambda_i = 0, 1, 2, \ldots, h_i)} p_1^{h_1-\lambda_1} p_2^{h_2-\lambda_2} p_3^{h_3-\lambda_3} \ldots$$

Et de même on voit que la somme de ces diviseurs-là est

$$S = \sum_{\lambda} \left\{ \left[\frac{m}{p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots} \right] p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots \right\}$$
$$= (\text{si } m = n) \; n(h_1+1)(h_2+1) \ldots$$

Par exemple, la somme des diviseurs de $(10, \mu)$, où $\mu = 1, 2, \ldots, 9)$, est 22; tandis que si $\mu = 10$, cette somme est $10.2.2 = 40$ (*voir* aussi Cesàro, *Liège Soc. R. Mém.*, 2e série, t. X, 1883, p. 1 et suiv., Note 8).

10. D'une façon semblable, que l'on considère les points

$$\begin{array}{llll}
(1, \lambda, 1), & (1, \lambda, 2), & (1, \lambda, 3), & \ldots, \; (1, \lambda, n), \\
(2, \lambda, 1), & (2, \lambda, 2), & (2, \lambda, 3), & \ldots, \; (2, \lambda, n), \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, \; \ldots\ldots\ldots, \\
(m, \lambda, 1), & (m, \lambda, 2), & (m, \lambda, 3), & \ldots, \; (m, \lambda, n),
\end{array}$$

où λ, m, n sont des entiers arbitraires.

Le nombre des points (~ 1) dans la ligne $\mu (\mu \leqq m)$ est $R_n(\mu, \lambda)$, tandis que le nombre de points dans la colonne $\nu (\nu \leqq n)$ est $R_m(\nu, \lambda)$.

Il en résulte tout de suite

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=m} R_n(\mu, \lambda) = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} R_m(\nu, \lambda).$$

Si d'ailleurs nous supposons que λ varie de 1 à k, nous voyons que le système des points ainsi exposé consiste en les points du parallélépipède du n° **5**.

De là il résulte (d'après le n° **7**) que

$$\sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left[\frac{n}{d} \right] \left[\frac{k}{d} \right] \left[\frac{m}{d} \right] = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \sum_{\substack{d \\ \nu, \lambda}} \varepsilon_d \left[\frac{m}{d} \right] = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \sum_{\substack{d \\ \mu, \lambda}} \varepsilon_d \left[\frac{n}{d} \right].$$

11. Ensuite on peut exprimer avec les fonctions φ et Φ le nombre de points (~ 1) qui appartiennent à un cube. Dans la figure du n° **5**, supposons égaux les trois côtés du parallélépipède OD de manière que $ON = n = OK = OM$.

Le plan parallèle au plan xz à la distance $y = k$ (où k est un entier $\leqq n$) contient les points

$$\begin{array}{llll}
(1, k, 1), & (1, k, 2), & (1, k, 3), & \ldots, \quad (1, k, n), \\
(2, k, 1), & (2, k, 2), & (2, k, 3), & \ldots, \quad (2, k, n), \\
(3, k, 1), & (3, k, 2), & (3, k, 3), & \ldots, \quad (3, k, n). \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots \quad \ldots\ldots, \\
(n, k, 1), & (n, k, 2), & (n, k, 3), & \ldots \quad (n, k, n).
\end{array}$$

Puisque $(l, k, m) \sim (m, k, l)$, où m, k, l sont des entiers, on voit que les points de l'un ou de l'autre côté de la diagonale sont équivalents.

En prenant les points dans la ligne i ($i \leqq n$), et en y ajoutant les points (~ 1) de la diagonale, on a

$$(i, k, 1), \quad (i, k, 2), \quad \ldots, \quad (i, k, i).$$

Le nombre de ces points (~ 1) est $\Phi(i, k)$ (*voir* n° **6**). Il en résulte que le nombre des points (~ 1) qui se trouvent dans le plan que nous venons de mentionner est

$$2\sum_{i=1}^{i=n} \Phi(i, k),$$

moins les points de la diagonale, puisque ces points-ci se comptent deux fois dans la sommation double.

Et encore, puisque $(l, k, l) \sim (l, k)$, les points de la diagonale peuvent s'écrire

$$(1, k), \quad (2, k), \quad (3, k), \quad \ldots \quad (n, k).$$

D'où il résulte que le nombre des points (~ 1) de ce cube-là est

$$2\sum \Phi(i, k)$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

moins le nombre de points (~ 1) qui se trouvent sur les diagonales.

Ces points de la diagonale sont ceux qu'on a donnés dans le schéma (A) du n° **8**.

Par conséquent, le nombre des points cherché est

$$2\sum \Phi(i, k) - 2\sum_{j=1}^{j=n} \varphi(j) + 1$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ce nombre est (*voir* n° **5**)

$$\sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left[\frac{n}{d}\right]^3.$$

Par conséquent, on a

$$2\sum \Phi(i, k) - 2\sum_{j=1}^{j=n} \varphi(j) + 1 = \sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left[\frac{n}{d}\right]^3.$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Si l'on donne encore à

$$\sum_{j=1}^{j=n} \varphi(j) - 1$$

sa valeur, comme on la trouve dans le n° **5**, on a

$$2\sum \Phi(i, k) = \sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left\{\left[\frac{n}{d}\right]^2 \left[\frac{n}{d}\right] + 1\right\}$$
$$(i, k = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Si b dénote le nombre des points (~ 1) d'un cube, on a pour

les valeurs de

$$\begin{array}{lllllllllll} n=1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & \ldots \\ b=1, & 7, & 25, & 55, & 115, & 181, & 307, & 439, & 637, & 841, & \ldots \end{array}$$

On remarque que

$$(a, b, c) \sim (a, c, b) \sim (b, a, c) \sim (b, c, a) \sim (c, a, b) \sim (c, b, a)$$

et que

$$(a, a, b) \sim (a, b, a) \sim (b, a, a) \sim (b, b, a) \sim (b, a, b) \sim (a, b, b),$$

et encore que $(a, a, a) \sim a$ est équivalent à l'unité quand $a = 1$. Tous ces points font partie du cube pour les valeurs $a \overline{<} n$, $b \overline{<} n$, $c \overline{<} n$.

On voit que dans tous ces cas

$$b \equiv 1 \pmod 6.$$

Les six points s'arrangent deux à deux, trois de l'un et de l'autre côté du plan diagonal qui traverse l'origine et les deux sommets les plus éloignés.

12. D'après les n^{os} **9** et **11**, on peut voir que le nombre de points (~ 1) d'un parallélépipède dont les côtés sont (*voir* n° **5**) $ON = n$, $OK = m$, $OM = n$, est

$$2\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{t=1}^{t=m}\Phi(i, t) - \sum_{\sigma=1}^{\sigma=m} r_n(\sigma) - \sum_{d=1}^{d=\infty}\varepsilon_d\left[\frac{n}{d}\right]^2\left[\frac{m}{d}\right];$$

et, d'après le n° **9**, on arrive au théorème intéressant appartenant à la théorie des nombres

$$2\sum\Phi(i, t) = \sum_{d=1}^{d=\infty}\varepsilon_d\left[\frac{n}{d}\right]^2\left[\frac{m}{d}\right]\left\{1 + \left[\frac{n}{d}\right]\right\}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ t = 1, 2, \ldots, m).$$

Si, de la même manière, on considère un parallélépipède où $ON = n + \nu$, $OK = m$, $OM = n$, on peut dériver un nombre d'autres formules arithmétiques intéressantes; et naturellement, les mêmes procédés appliqués à tout autre solide régulier produisent des résultats arithmétiques analogues.

Dans ce qui suit, nous allons fournir des applications importantes des résultats déjà établis.

15. *Généralisation d'un théorème prouvé par Liouville* (¹) *et par Dedekind* (²). — Soient n et k deux entiers arbitraires et f une fonction arbitraire de ses variables. Soit h un entier quelconque qui prend les valeurs $1, 2, \ldots, n$. Supposons encore que $\rho(n, k, h) = 0$, excepté quand $(n, k, h) \sim 1$; dans ce cas, posons $\rho(n, k, h) = 1$.

Soient $p_1, p_2, \ldots$ les diviseurs premiers de d, où $d \sim (k, h)$. On voit que

$$\sum_{h=1}^{h=n} \rho(n, k, h) f(n, k, h) = \sum_{h=1}^{h=n} f(n, k, h) - \sum_{h_i=1}^{h_i=\frac{n}{p_i}} f(n, k_i p_i, h_i p_i)$$
$$+ \sum_{h_{ij}=1}^{h_{ij}=\frac{n}{p_i p_j}} f(n, k_{ij} p_i p_j, h_{ij} p_i p_j) - \sum_{h_{ijl}=1}^{h_{ijl}=\frac{n}{p_i p_j p_l}} f(n, k_{ijl} p_i p_j p_l, h_{ijl} p_i p_j p_l)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

où

$$k = k_i p_i = k_{ij} p_i p_j = k_{ijl} p_i p_j p_l = \ldots$$
$$(i, j, l, \ldots = 1, 2, 3, \ldots;\ i \neq j \neq l \ldots).$$

Par conséquent,

$$(1) \qquad \sum_{h=1}^{h=n} \rho(n, k, h) f(n, k, h) = \sum_{\mu=1}^{\mu=d'} \sum_{\frac{d}{(n,k)}} f(n, d, k_d, \mu d),$$

où

$$dk_d = k \qquad \text{et} \qquad dd' = n.$$

Ensuite, définissons deux fonctions nouvelles par les formules

$$F(n, k, d) = \sum_{\mu=1}^{\mu=d'} f(n, dk_d, \mu d),$$

$$G(n, k, d) = \sum_{\mu=1}^{\mu=d'} \rho(d', k, \mu) f(n, dk_d, \mu d),$$

(¹) Liouville, *Journal de Liouville*, 2ᵉ série, t. II, p. 110.

(²) Dedekind, *Journal de Crelle*, Bd. 54, p. 1. *Voir* aussi Kronecker, *loc. cit.*, p. 246.

où

$$dk_d = d \qquad \text{et} \qquad dd' = n.$$

Il s'ensuit que

$$G(n, k, 1) = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \rho(n, k, \mu) f(n, k, \mu),$$

et cette formule [*voir* (I)] équivaut à

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=d'} \sum_{\frac{d}{(n,k)}} \varepsilon_d f(n, dk_d, \mu d),$$

où

$$\text{(II)} \qquad G(n, k, 1) = \sum_{\frac{d}{(n,k)}} \varepsilon_d F(n, k, d).$$

Et encore on voit que

$$\sum_{\frac{d}{(n,k)}} G(n, k, d) = \sum_{\frac{d}{(n,k)}} \sum_{\mu=1}^{\mu=d'} \rho(d', k, \mu) f(n, dk_d, \mu d).$$

A l'égard d'un diviseur défini d, le nombre de termes qui se trouvent à droite (*voir* n° **6**) est $\Phi(d', k)$, de sorte que le nombre de termes à droite est

$$\sum_{\frac{d'}{n}} \Phi(d', k);$$

lequel nombre est n.

Puisque aucun de ces termes ne se répète, on a

$$\text{(III)} \qquad \sum_{\frac{d}{(n,k)}} G(n, k, d) = f(n, k, 1) + f(n, k, 2) + \ldots + f(n, k, n)$$
$$= F(n, k, 1).$$

Sont à noter les rapports réciproques qui existent entre les deux équations (II) et (III).

14. Pour appliquer le théorème qu'on vient de prouver :

1° Posons la fonction arbitraire $f(n, k, h) = h$. Par conséquent,

on a

$$G(n, k, 1) = \sum \tau,$$

où la sommation s'étend à tous les entiers $\tau (\leqq n)$ tels que

$$(n, k, \tau) \sim 1,$$

et

$$F(n, k, d) = \sum_{\mu=1}^{\mu=d'} (\mu d), \qquad \text{où} \qquad dd' = n.$$

D'après (II), il résulte que

$$\sum_{\substack{(n,k,\tau)\sim 1 \\ (\tau \leqq n)}} \tau = \sum_{\frac{d}{(n,k)}} \varepsilon_d \sum_{\mu=1}^{\mu=d'} \mu d = \sum_{\frac{d}{(n,k)}} \varepsilon_d d \sum_{\mu=1}^{\mu=d'} \mu$$

$$= \sum_{\frac{d}{(n,k)}} \varepsilon_d dd' \frac{d'+1}{2} = \frac{n}{2} \left[\sum_{\frac{d}{(n,k)}} \varepsilon_d d' + \sum_{\frac{d}{(n,k)}} \varepsilon_d \right].$$

2° Posons $f(n, k, h) = 1$; on a alors

$$G(n, k, 1) = \Phi(n, k), \qquad F(n, k, d) = d',$$

de sorte que, d'après (II),

$$\Phi(n, k) = \sum_{\frac{d}{(n,k)}} \varepsilon_d d' = n \sum_{\frac{d}{(n,k)}} \frac{\varepsilon_d}{d} \qquad (\textit{voir} \text{ n° } \mathbf{6}).$$

Par conséquent, on a

$$\sum_{k=1}^{k=m} \Phi(n, k) = n \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{\frac{d}{(n,k)}} \frac{\varepsilon_d}{d} = n \sum_{\frac{d}{n}} \left[\frac{m}{d} \right] \frac{\varepsilon_d}{d}.$$

Par exemple, posons $n = 6$, et considérons les systèmes

$$(6, k, 1), \quad (6, k, 2), \quad (6, k, 3), \quad (6, k, 4), \quad (6, k, 5), \quad (6, k, 6).$$

Le nombre de ces points (~ 1) est

$$6, \quad 3, \quad 4, \quad 3, \quad 6, \quad 2, \quad 6$$

quand

$$k = 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 7.$$

La somme des nombres de la première ligne est 30, et l'on voit que

$$30 = 6\left[\frac{7}{1} - \frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right].$$

Dans le n° **12**, on a montré que

$$2\sum_{k=1}^{k=m}\sum_{t=1}^{t=n}\Phi(t, k) = \sum_{d=1}^{d=\infty}\varepsilon_d\left[\frac{m}{d}\right]\left\{\left[\frac{n}{d}\right]\left\{1 + \left[\frac{n}{d}\right]\right\}\right\};$$

d'où il résulte un théorème intéressant appartenant à la théorie des nombres exprimé par la formule

$$\sum_{t=1}^{t=n} t\sum_{\frac{d}{t}}\left[\frac{m}{d}\right]\frac{\varepsilon_d}{d} = \sum_{d=1}^{d=\infty}\varepsilon_d\left[\frac{m}{d}\right]\left\{\left[\frac{n}{d}\right]\left\{1 + \left[\frac{n}{d}\right]\right\}\right\}.$$

Il s'ensuit encore (*voir* 1°) que

$$\sum_{\substack{n,k,\tau \sim 1\\ (\tau \leq n)}} \tau = \frac{n}{2}\left[\Phi(n, k) + \sum_{\frac{d}{n,k}}\varepsilon_d\right];$$

et l'on voit aussi que

$$(\mathrm{A})\qquad 2\sum_{k=1}^{k=m}\sum_{\substack{n,k,\tau \sim 1\\ (\tau \leq n)}} \tau = n\sum_{k=1}^{k=m}\left[\Phi(m, k) + \sum_{\frac{d}{n,k}}\varepsilon_d\right] = n^2\sum_{\frac{d}{n}}\left[\frac{m}{d}\right]\frac{\varepsilon_d}{d} + n\sum_{\frac{d}{n}}\left[\frac{m}{d}\right]\varepsilon_d.$$

Par exemple, posons $n = 6$, $m = 4$.

Les valeurs de τ sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, quand $k = 1$; et ces valeurs sont 1, 3, 5 quand $k = 2$; 1, 2, 4, 5 quand $k = 3$; 1, 3, 5 quand $k = 4$. Il en résulte que la somme de τ est 51, ce qui vérifie que

$$2.51 = 36\left[4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right] + 6[4 - 2 - 1].$$

On arrive à ce résultat aussi que

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\frac{2}{\nu}\sum_{k=1}^{k=m}\sum_{\substack{\nu,k,\tau\sim 1\\(\tau\equiv\nu)}}\tau=\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\sum_{k=1}^{k=m}\left[\Phi(\nu,k)+\sum_{\frac{d}{\nu,k}}\varepsilon_d\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{d=1}^{d=\infty}\varepsilon_d\left[\frac{n}{d}\right]\left[\frac{m}{d}\right]\left\{\frac{3}{2}+\left[\frac{n}{d}\right]\right\},$$

puisque

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\sum_{k=1}^{k=m}\sum_{\frac{d}{\nu,k}}\varepsilon_d=\sum_{d=1}^{d=\infty}\left[\frac{n}{d}\right]\left[\frac{m}{d}\right].$$

On peut arriver à des résultats semblables pour les puissances plus élevées de τ.

3° Posons $f(n,k,\nu)=\log\nu$, d'où il résulte que

$$G(n,k,1)=\sum_{\substack{n,k,\nu\sim 1\\(\nu\equiv n)}}\log\nu,$$

$$F(n,k,d)=\sum_{\mu=1}^{\mu=d'}\log(\mu,d)\qquad(dd'=n).$$

Par conséquent, d'après (H),

$$\sum_{\substack{n,k,\nu\\(\nu\equiv n)}}\log\nu=\sum_{\frac{d}{n,k}}\varepsilon_d\sum_{\mu=1}^{\mu=d}\log(\mu,d)$$

$$=\sum_{\frac{d}{n,k}}\varepsilon_d\sum_{\mu=1}^{\mu=d'}(\log\mu+\log d)\qquad=\sum_{\frac{d}{n,k}}\varepsilon_d[d'\log d+\log d'!)]$$

$$=\sum_{\frac{d}{n,k}}\varepsilon_d\left[\log d^{\frac{n}{d}}+\log\left(\frac{n}{d}!\right)\right]=\sum_{\frac{d}{n,k}}\log\left[d^{\frac{n}{d}}\left(\frac{n}{d}!\right)\right]^{\varepsilon_d}.$$

Il en résulte aussi que

$$e^{\sum\log\nu}=e^{\sum\log\left[d^{\frac{n}{d}}\left(\frac{n}{d}!\right)\right]^{\varepsilon_d}},$$

ou

$$\prod_{\substack{(n,k,\nu)\sim 1\\(\nu=n)}} \nu = \prod_{\frac{d}{(n,k)}} \left[d^{\frac{n}{d}} \left(\frac{n}{d}! \right) \right]^{\varepsilon_d}.$$

On a aussi

$$\prod_{k=1}^{k=K} \prod_{\substack{(n,k,\nu)\\ \nu=n}} \nu = \prod_{k=1}^{k=K} \prod_{\frac{d}{(n,k)}} \left[d^{\frac{n}{d}} \left(\frac{n}{d}! \right) \right]^{\varepsilon_d} = \prod_{\frac{d}{n}} \left[d^{\frac{n}{d}} \left(\frac{n}{d}! \right) \right]^{\varepsilon_d \left[\frac{K}{d}\right]}.$$

Par exemple, on voit que le produit des nombres mentionnés page 235 est

$$\frac{(6!)^5}{[2^3.(3!)]^2[3^2.(2!)]} = 2.3.4.5.6.3.5.2.4.5.3.5.$$

De la même manière, on voit aussi que

$$\prod_{n=1}^{n=N} \prod_{k=1}^{k=K} \prod_{\substack{(n,k,\nu)\sim 1\\(\tau=n)}} \tau = \prod_{d=1}^{d=N} \left\{ d^{\frac{d'(d'+1)}{2}} (1!\,2!\ldots d'!) \right\}^{\varepsilon_d \left[\frac{K}{d}\right]},$$

où $dd' = N$.

15. Dans les formules

$$F(n, k, 1) = \sum_{\frac{d}{(n,k)}} G(n, k, d),$$

$$G(n, k, 1) = \sum_{\frac{d}{(n,k)}} \varepsilon_d F(n, k, d),$$

supposons que k varie de 1 à K, et formons les fonctions

$$F_1(n, k, 1) = \sum_{k=1}^{k=K} F(n, k, 1).$$

$$G_1(n, k, 1) = \sum_{k=1}^{k=K} G(n, k, 1).$$

Si l'on observe que $(n, k, d, d) \sim (n, d)$, il s'ensuit que [*voir* (III) et (II)]

$$F_1(n, k, 1) = \sum_{k=1}^{k=k} \sum_{\frac{d}{(n,k)}} G(n, k, d) = \sum_{\frac{d}{n}} \left[\frac{k}{d}\right] G(n, d).$$

Puisque

$$G_1(n, k, d) = \sum_{k=1}^{k=k} G(n, k, d) = \left[\frac{k}{d}\right] G(n, d),$$

où d est un diviseur de n et de k, on a

$$\text{(IV)} \qquad F_1(n, k, 1) = \sum_{\frac{d}{(n,k)}} G_1(n, k, d).$$

On a aussi

$$\text{(V)} \qquad G_1(n, k, 1) = \sum_{k=1}^{k=k} G(n, k, 1) = \sum_{k=1}^{k=k} \sum_{\frac{d}{(n,k)}} \varepsilon_d F(n, k, d)$$

$$= \sum_{\frac{d}{n}} \varepsilon_d \left[\frac{k}{d}\right] F(n, d) = \sum_{\frac{d}{(n,k)}} \varepsilon_d F_1(n, k, d).$$

Exemple. — Si $f(n, k, h) = 1$, on a

$$F(n, k, d) = d' = \frac{n}{d},$$

où d est ici un diviseur de n et de k,

$$G(n, k, 1) = \Phi(d', k), \qquad G(n, k, 1) = \Phi(n, k).$$

Il s'ensuit que [*voir* (V)]

$$\sum_{k=1}^{n=k} G(n, k, 1) = \sum_{k=1}^{n=k} \Phi(n, k) = \sum_{\frac{d}{n}} \left[\frac{k}{d}\right] \frac{n}{d},$$

ce qui vérifie la formule (p. 237).

16. Nous définissons deux fonctions nouvelles par les formules

$$\text{(VI)}\qquad F_2(n, k, 1) = \sum_{n=1}^{n=N} F_1(n, k, 1) = \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{\frac{d}{n}} \left[\frac{k}{d}\right] G(n, d)$$

$$= \sum_{i=1}^{i=d'} \left[\frac{k}{d}\right] G(di, d),$$

$$\text{(VII)}\qquad G_2(n, k, 1) = \sum_{n=1}^{n=N} G_1(n, k, 1) = \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{\frac{d}{n}} \varepsilon_d \left[\frac{k}{d}\right] F(n, d)$$

$$= \sum_{i=1}^{i=d'} \varepsilon_d \left[\frac{k}{d}\right] F(di, d),$$

où

$$dd' = N; \qquad d = 1, 2, \ldots, N.$$

On arrive aussi aux résultats que voici :

$$\text{(VIII)}\qquad F_2(n, k, 1) = \sum_{\frac{d}{n}} \sum_{n=1}^{n=N} \left[\frac{k}{d}\right] G(n, d)$$

$$= \sum_{\frac{d}{n, k, d}} \sum_{n=1}^{n=N} G_1(n, k, d) = \sum_{\frac{d}{n, k}} G_2(n, k, d);$$

et semblablement

$$\text{(IX)}\qquad G_2(n, k, 1) = \sum_{\frac{d}{n, k}} \varepsilon_d F_2(n, k, d).$$

Exemple I. — Si, comme dans le paragraphe précédent,

$$F(n, k, d) = \frac{n}{d}, \qquad F(di, d) = \frac{di}{d} = i,$$

$$G(n, k, d) = \Phi(d', k), \qquad G(n, k, 1) = \Phi(n, k).$$

il en résulte que

$$\sum_{n=1}^{n=N}\sum_{k=1}^{k=k}\Phi(n,k)=\sum_{i=1}^{i=d'}\varepsilon_d\left[\frac{k}{d}\right]i=\sum_{d=1}^{d=\infty}\varepsilon_d\left[\frac{k}{d}\right]\frac{d'(d'+1)}{2}$$
$$=\sum_{d=1}^{d=\infty}\varepsilon_d\left[\frac{k}{d}\right]\left[\frac{N}{d}\right]\left\{\frac{\left[\frac{N}{d}\right]+1}{2}\right\},$$

ce qui est une vérification du n° **12**.

Exemple II. — Si $f(n,k,d)=d$, on a

$$F(n,k,d)=\sum_{\mu=1}^{\mu=d'}f(n,k_d d,\mu d)=\sum_{\mu=1}^{\mu=d'}\mu d \qquad (k=k_d d),$$
$$F(di,d)=\sum_{\mu=1}^{\mu=i}f(di,\mu d)=\sum_{\mu=1}^{\mu=i}\mu d=\frac{i(i+1)}{2}d,$$
$$G(n,k,1)=\sum_{\substack{n,k,\tau\sim 1\\(\tau=n)}}\tau.$$

Il s'ensuit (*voir* VII) que

$$(B)\qquad \sum_{n=1}^{n=N}\sum_{k=1}^{k=k}\sum_{\substack{n,k,\tau\sim 1\\(\tau=n)}}\tau=\sum_{i=1}^{i=d'}\varepsilon_d\left[\frac{k}{d}\right]\frac{i(i+1)}{2}d=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=d'}\varepsilon_d\left[\frac{k}{d}\right](d(i^2+i)$$
$$=\frac{1}{6}\sum\varepsilon_d\left[\frac{k}{d}\right]dd'(d'+1)(d'+2)\qquad(dd'=n).$$

Exemple. — Pour appliquer la formule susnommée, posons

$$N=12,\qquad k=7.$$

La formule (A) du n° **14** donne pour

$$n=1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6\quad 7\quad 8\quad 9\quad 10\quad 11\quad 12$$

les valeurs

$$14\quad 30\quad 72\quad 104\quad 200\quad 198\quad 378\quad 384\quad 558\quad 560\quad 924\quad 756$$

La somme des nombres de la deuxième ligne est 4178, et ce nombre divisé par 2 donne ce résultat :

$$2089 = \frac{1}{6}\left[7.1.12.13.14 - 3.2.6.7.8 - 2.3.4.5.6 - 1.5.2.3.4 + 1.6.2.3.4 - 1.7.1.2.3\right],$$

qui est une vérification de la formule (B).

On peut dériver des résultats semblables pour les puissances de τ.

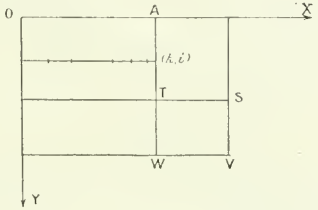
16. *Une application à la théorie analytique des nombres.* — Le nombre des points (~ 1) du système

$$(1, i), \quad (2, i), \quad (3, i), \quad \ldots, \quad (k, i)$$

a été dénoté par le symbole $r_k(i)$.

En d'autres termes, $r_k(i)$ est le nombre des points (~ 1) le long de

Fig. 2.



la ligne $y = i$, qui part de l'axe y et qui s'étend jusqu'au point (k, i) inclusivement. Ce nombre est (*voir* n° 5)

$$\sum_{\substack{d \\ i}} \varepsilon_d \left[\frac{k}{d}\right].$$

Si les coordonnées de T sont (k, m), on voit que le nombre des points (~ 1) du rectangle OT est

$$\sum_{i=1}^{i=m} \sum_{\substack{d \\ i}} \varepsilon_d \left[\frac{k}{d}\right] = \sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left[\frac{k}{d}\right] \left[\frac{m}{d}\right].$$

Par exemple, si $k = 10$ et $m = 7$, le nombre des points (~ 1) du rectangle sur ces deux côtés est

$$70 - 15 - 6 - 2 + 1 - 1 = 47.$$

Si les coordonnées de V sont (k_1, m_1), le nombre des points (~ 1) du rectangle AV est

$$\sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left[\frac{m_1}{d}\right] \left\{ \left[\frac{k_1}{d}\right] - \left[\frac{k}{d}\right] \right\},$$

duquel nombre est exclu le nombre des points (~ 1) de la ligne AW. Le nombre des points (~ 1) du rectangle TV est

$$\sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left\{ \left[\frac{m_1}{d}\right] - \left[\frac{m}{d}\right] \right\} \left\{ \left[\frac{k_1}{d}\right] - \left[\frac{k}{d}\right] \right\},$$

où ne sont pas comptés les points (~ 1) des lignes TS et TW.

17. D'une façon analogue, le nombre des points (~ 1) du système

$$(k, m, 1), \quad (k, m, 2), \quad \ldots, \quad (k, m, n_1)$$

se dénote par

$$R_{n_1}(k, m),$$

ce qui est le nombre des points (~ 1) de la ligne TH de la figure, où les coordonnées de H, sont (k, m, n_1).

Ce nombre (*voir* n° **7**) est

$$R_{n_1}(k, m) = \sum_{\frac{d}{(k, m)}} \varepsilon_d \left[\frac{n_1}{d}\right].$$

Il est clair aussi que le nombre des points (~ 1) de la face AE_1 est

$$\sum_{p=1}^{p=m_1} R_{n_1}(k, p) = \sum_{p=1}^{p=m_1} \sum_{\frac{d}{(k, p)}} \varepsilon_d \left[\frac{n_1}{d}\right] = \sum_{\frac{d}{k}} \varepsilon_d \left[\frac{m_1}{d}\right] \left[\frac{n_1}{d}\right],$$

où les coordonnées de E_1 sont (k_1, m_1, n_1).

Si les coordonnées de D sont (k_1, m_1, n_1), nous trouverons sans

difficulté de la même manière que le nombre de points (~ 1) du parallélépipède rectangulaire OD est

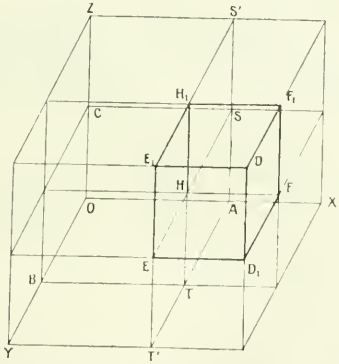
$$N_1 = \sum_{k=1}^{k=k_1} \sum_{\frac{d}{k_1}} \varepsilon_d \left[\frac{m_1}{d}\right] \left[\frac{n_1}{d}\right] = \sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left[\frac{k_1}{d}\right] \left[\frac{m_1}{d}\right] \left[\frac{n_1}{d}\right]$$

et, pour le parallélépipède HD, ce nombre est

$$N = \sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left\{\left[\frac{k_1}{d}\right] - \left[\frac{k}{d}\right]\right\} \left\{\left[\frac{m_1}{d}\right] - \left[\frac{m}{d}\right]\right\} \left\{\left[\frac{n_1}{d}\right] - \left[\frac{n}{d}\right]\right\},$$

où les coordonnées de H sont (k, m, n) et où les points (~ 1) des faces HD_1, HE_1, HF_1 sont exclus du calcul.

Fig. 3.



Si g est le moindre des nombres k_1, m_1, n_1, on peut écrire

$$N = \sum_{d=1}^{d=g} \varepsilon_d \left\{\frac{k_1 - k}{d} - \rho_d\right\} \left\{\frac{m_1 - m}{d} - \sigma_d\right\} \left\{\frac{n_1 - n}{d} - \tau_d\right\},$$

où ρ_d, σ_d, τ_d sont des quantités chacune moindre que 1.

Si encore on pose

$$k_1 - k = \lambda, \qquad m_1 - m = \mu, \qquad n_1 - n = \nu,$$

on a

$$N = \sum_{d=1}^{d=g} \varepsilon_d \left\{ \frac{k}{d} - \rho_d \right\} \left\{ \frac{\mu}{d} - \sigma_d \right\} \left\{ \frac{\nu}{d} - \tau_d \right\}$$

ou

$$N = k\mu\nu \sum_{d=1}^{d=\infty} \frac{\varepsilon_d}{d^3} - R,$$

où

$$R = k\mu\nu \sum_{d=g+1}^{d=\infty} \frac{\varepsilon_d}{d^3} + \sum_{d=1}^{d=g} \frac{\varepsilon_d}{d^2} \{ \tau_d k\mu + \sigma_d k\nu + \rho_d \mu\nu \}$$

$$- \sum_{d=1}^{d=g} \frac{\varepsilon_d}{d} \{ \mu\rho_d\tau_d + \nu\rho_d\sigma_d + k\sigma_d\tau_d \} + \sum_{d=1}^{d=g} \varepsilon_d \rho_d \sigma_d \tau_d.$$

Dans la discussion présente, nous ne désirons que les limites en dedans desquelles se trouve R et nous n'arriverons pas à la valeur exacte. Voilà pourquoi nous poserons tous les signes comme positifs.

Et encore qu'on observe que (*voir* par exemple KRONECKER, *loc. cit.*, p. 258)

$$\sum_{i=a+1}^{i=b} f(i) < \int_{x=a}^{x=b} f(x)\, dx,$$

où $f(x)$ est une fonction qui décroît quand augmente la variable x.

Il est clair que

$$R < \frac{k\mu\nu}{g^2} + \frac{k\mu + k\nu + \nu\mu}{g} + (k + \mu + \nu)(1 + \log g) + g,$$

où

$$R < g \left[\frac{k}{g} + 1 \right] \left[\frac{\mu}{g} + 1 \right] \left[\frac{\nu}{g} + 1 \right] + (\mu + \nu + k) \log g.$$

Si g est le plus grand des nombres k, μ, ν, on a

$$R < g \left(\frac{G}{g} + 1 \right)^3 + 3G \log g.$$

Et encore, puisque

$$\sum_{d=1}^{d=\infty} \frac{\varepsilon_d}{d^3} = \frac{1}{\sum_{d=1}^{d=\infty}},$$

on aura

$$N = \frac{k\mu\nu}{\sum\limits_{d=1}^{d=\infty} \frac{1}{d^3}} + \lambda \left[\frac{(G+g)^3}{g^2} + 3G \log g \right],$$

où la valeur de λ se trouve située entre $+1$ et -1. De ceci on voit que

$$\frac{1}{\sum\limits_{d=1}^{d=\infty} \frac{1}{d^3}} = \frac{1}{1.202\ldots}$$

est la valeur asymptotique de $\frac{N}{k\mu\nu}$; c'est-à-dire pour des valeurs grandes de k, μ, ν la limite de $\frac{N}{k\mu\nu}$ est presque $\frac{5}{6}$; ou, autrement exprimé, $\frac{5}{6}$ est la probabilité que le plus grand commun diviseur de trois entiers quelconques l, m, n soit l'unité.

Pour une discussion de valeurs semblables asymptotiques de deux variables, *voir* Dirichlet, *Werke*, t. II, p. 97, et aussi Lebesgue, *Journ. de Math.*, 2e série, t. I, 1856, p. 377.

Le théorème qui exprime la probabilité que deux nombres soient relativement premiers l'un à l'autre est fourni par Sylvester (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XCVI, 1883, p. 409), un théorème que revendiquait comme sien Cesàro (*Johns Hopkins Circular*, 2e série, 1883, p. 85). *Voir* aussi la discussion entre Cesàro et Jensen (*Comptes rendus*, t. CVI, 1888, p. 1651). On renvoie le lecteur à une série d'articles de J. Liouville sous le titre : *Sur quelques fonctions numériques* (*Journ. de Math.*, 2e série, t. II et suiv.), et aussi à plusieurs œuvres de Cesàro (*Ann. di Mat.*, 2e série, t. XIII).

Moyennant l'introduction de la géométrie des nombres de trois dimensions ou plus, les généralisations et extensions des théorèmes trouvés dans ces Mémoires et d'autres offrent beaucoup d'intérêt.

Congruence se rapportant aux nombres de Bernoulli et d'Euler au module p^{i+1};

PAR F.-W. BURSTALL.

Au Volume 41 du *Journal de Crelle*, dans un article intitulé *Ueber eine allgemeine Eigenschaft der rationalen Entwickelungscöefficienten einer bestimmten Gattung analytischen Functionen*, Kummer nous donne une congruence générale se rapportant aux nombres de Bernoulli et d'Euler, ces derniers étant appelés *coefficients sécants* et désignés par le symbole c_n.

Nous nous proposons, dans le présent article, de développer ces congruences et de leur donner des formes plus générales, à l'aide d'une nouvelle congruence qui traite des différences de zéro, attendu que ces différences se prêtent facilement à l'étude des fonctions périodiques dans la théorie des nombres.

Propriétés congruentes de $\Delta^r o^n$.

Le symbole $\Delta u_x = u_{x+1} - u_x$ a des propriétés bien connues lorsque u_x est une fonction entière rationnelle de x qui est de degré n. L'expression $\Delta^r o^n$ veut dire qu'on fait r fois l'opération Δ sur x^n, et qu'alors on fait x égal à zéro.

On a immédiatement d'après la définition

$$\Delta^r o^n = r\,\Delta^{r-1} o^{n-1} + r\,\Delta^r o^{n-1},$$

d'où il est facile de déduire que $\Delta^r o^n$ est divisible par $\lfloor r$ [1], pour r

[1] JEFFREY, *Quart. Journal*, vol. VII, p. 75.

plus grand que n,

$$\Delta^r o^n = o.$$

D'après sa définition, le symbole Δ obéit évidemment aux lois ordinaires de l'Algèbre, et pourvu qu'on l'emploie à opérer sur une fonction entière rationnelle de x, les résultats seront aussi strictement exacts que si l'on usait de toute autre méthode. Pour un traitement complet des méthodes symboliques, et pour la légitimité de leur emploi, nous pouvons nous en référer à Cesàro [1].

Si comme de coutume nous écrivons

$$(1+x)^r = 1 + (r)_1 x + (r)_2 x^2 + \ldots + (r)_s x^s + \ldots$$

il s'ensuit que

$$\Delta^r o^n = r^n - (r)_1 (r-1)^n + (r)_2 (r-2^n)^n + \ldots + (-1)^s (r-s)(r)_s + \ldots + (-1)^r (r)_{r-1} 1^n.$$

Le théorème de Fermat énonce que

$$r^{p-1} - 1 \equiv o \qquad (\operatorname{mod} p),$$

tant que r et p sont premiers entre eux.

D'où, si i est un nombre entier,

$$r^{p^i(p-1)} - 1 \equiv o \qquad (\operatorname{mod} p^{i+1}).$$

Comme dans ce Mémoire on aura fréquemment l'occasion d'employer l'expression $p^i(p-1)$, nous la désignerons par un symbole unique

$$v = p^i(p-1).$$

Si maintenant nous écrivons $n = kv + t$, où t est plus petit que v pour p plus grand que r puisque

$$\Delta^r o^n = r^t - (r)_1 (r-1)^t + \ldots + (-1)^{r-1} (r)_{r-1} 1^t \qquad (\operatorname{mod} p^{i+1}),$$

il s'ensuit que

$$\Delta^r o^n \equiv \Delta^r o^t \qquad (\operatorname{mod} p^{i+1}).$$

Lorsque t est égal à zéro,

$$\Delta^r o^n = 1 - (r)_1 + (r)_2 + \ldots + (-1)^{r-1} (r)_{r-1} + (-1)^{r+1} \qquad (\operatorname{mod} p^{i+1}).$$

---

[1] *Principes du calcul symbolique* (*Mathesis*, 1883, p. 10).

Si $i = 0$, comme $\Delta^r 0^n$ contient $\underline{|r}$ en facteur

$$\Delta^r 0^n \equiv 0 \pmod{p}, \qquad r = p;$$
$$\Delta^r 0^n \equiv (-1)^{r+1} \pmod{p}, \qquad r < p.$$

Quand p est plus petit que r, les résidus prennent la forme de séries, et toutes les fois que r excède un multiple de p, une nouvelle série commence, si bien que le résultat devient compliqué.

Il est possible d'obtenir des résultats utiles par des méthodes plus simples.

Considérons la fonction

$$\Phi^v (ax + b)^m [(ax + b)^v - 1]^n,$$

dans laquelle Φ est un facteur de la forme

$$\Phi = \alpha_1 \Delta + \alpha_2 \Delta^2 + \ldots + \alpha_s \Delta^s,$$

les α_s étant des entiers; $v = p^v(p - 1)$ dans cette expression, p est un nombre premier, a et b sont des nombres entiers, et en même temps a, b, p sont premiers entre eux, m et n sont des entiers positifs, x est une variable qui peut prendre n'importe quelle valeur entière, y compris zéro, après qu'on a fait l'opération Φ^v.

Φ^v se composera de termes de la forme $A_t \Delta^t$ et

$$\Delta^t (ax + b)^m [(ax + b)^v - 1]^m = (-1)^t \sum_{q=1}^{q=t} (t)_q \left[a\overline{x + q} + b\right]^m \left[(a\overline{x + q} + b)^v - 1\right]$$

tant que $a(x + q) + b$ et p sont premiers entre eux

$$(a\overline{x + q} - b)^v - 1 \equiv 0 \pmod{p^{i+1}}.$$

Lorsque $a\overline{x + q}$ et p cessent d'être premiers entre eux

$$(a\overline{x + q} + b)^m \equiv 0 \pmod{p^m},$$

c'est-à-dire

$$\Delta^t (ax + b)^m [(ax + b)^v - 1]^n \equiv 0 \pmod{p^{\overline{i+1}n}}.$$

Lorsque $m \geqq \overline{i + 1}\, n$, si $m = n$,

$$\Delta^t (ax + b)^m [(ax + b)^v - 1]^n \equiv 0 \pmod{p^{in}}.$$

c'est-à-dire

$$\Phi^v (ax + b)^m [(ax + b)^v - 1]^n \equiv 0 \pmod{p^{i+1}}.$$

On remarque qu'on n'impose aucune restriction pour r et pour x, si bien que le théorème a un caractère très général. Il est même facile de le généraliser encore davantage. En effet, considérons une série dont les termes sont des puissances de Φ; la somme de ces séries aura la même propriété que chacun de ses termes, et il devient ainsi possible de supprimer la restriction qui veut que les α soient des entiers; ceci conduit aux fonctions de Bernoulli et d'Euler, mais il nous faut pour l'instant laisser de côté un examen détaillé de ces fonctions importantes.

Pour ce qui regarde le calcul des différences, ce théorème est, je crois, nouveau; on trouve cependant une formule semblable dans un Mémoire de Stern ([1]), mais il ne traite que d'un cas spécial. La notation non symbolique l'empêche, dans une large mesure, d'obtenir l'entière généralisation des résultats.

J'appellerai *complètement périodique* toute fonction de la forme

$$\Phi^r(ax+b)^m[(ax+b)^v-1]^n$$

avec une restriction pour m et n, mais sans restriction pour r. S'il y a une restriction pour r, j'appellerai la fonction *partiellement périodique*.

Les nombres de Bernoulli.

Par égard pour la symétrie, qui a une grande importance dans tout calcul symbolique, nous adopterons pour les nombres de Bernoulli la notation de Glaisher ([2]), à savoir

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 + V_1\frac{x}{\underline{|1}} + V_2\frac{x^2}{\underline{|2}} + \ldots + V_n\frac{x^n}{\underline{|n}} + \ldots,$$

où

$$V_{2n+1} = 0, \qquad n > 0, \qquad x < 2\pi.$$

Cette notation a été employée pour la première fois par Blissard.

A l'aide de cette notation nous pouvons facilement déduire deux

---

([1]) *Theorie der Eulerschen zahlen* (*Journ. de Crelle*, vol. 79, p. 67).

([2]) *Quart. Journal*, vol. XXXI, p. 193.

formules pour les nombres de Bernoulli,

$$(2^{2n}-1)\frac{V_{2n}}{2n} = +\left[-\frac{\Delta}{2}+\frac{\Delta^2}{2^2}-\frac{\Delta^3}{2^3}-\ldots-\frac{\Delta^{2n-1}}{2^{2n}}\right]0^{2n-1},$$

$$V_{2n} = \left(-\frac{\Delta}{2}+\frac{\Delta^2}{3}-\frac{\Delta^3}{4}+\ldots+\frac{\Delta^{2n}}{2n+1}\right)0^{2n}.$$

La première de ces formules se prête aisément à déterminer les propriétés congruentes des nombres de Bernoulli, et il est assez curieux de voir que c'est la formule obtenue par Brinkley qui, le premier, fit usage de la notation de $\Delta^n 0^m$ (¹).

Nous pouvons maintenant appliquer le théorème directement à la première formule en écrivant les nombres de Bernoulli de la façon suivante :

$$2^r\left(-\frac{\Delta}{2}+\frac{\Delta^2}{2^2}+\ldots+(-1)^r\frac{\Delta^r}{2^r}\right)0^m(0^v-1)^n \equiv 0 \qquad (\bmod \overline{p^{i+1}n}).$$

$$m \geq n(i+1),$$

c'est-à-dire, si $r = m + nv$,

$$(2^{r+1}-1)\frac{V_{r+1}}{r+1}-(2^{r+1-v}-1)(n)_1\frac{V_{r+1-v}}{r+1-v}+\ldots+(-1)^n(2^{m+1}-1)\frac{V_{m+1}}{m+1} \equiv 0$$

$$(\bmod p^{i(n+1)}), \qquad m \geq (i+1)n.$$

Faisons $n = 1$:

$$(2^{m+1+v}-1)\frac{V_{m+1+v}}{m+1+v}-(2^{m+1}-1)\frac{V_{m+1}}{m+1} \equiv 0 \qquad (\bmod p^{i+1}), \qquad m \geq i+1.$$

Tant que $m + 1$ ne contient pas $p - 1$ en facteur,

$$2^{m+1+v}-1 \equiv 2^{m+1}-1 \qquad (\bmod p^{i+1});$$

d'où

$$\frac{V_{m+1+v}}{m+1+v} \equiv \frac{V_{m+1}}{m+1} \qquad (\bmod p^{i+1}), \qquad m \geq i+1, \qquad v = p^i(p-1),$$

$m + 1$ n'étant pas un multiple de $p - 1$ (²).

En donnant successivement à n les valeurs 2, 3, ..., n, il est facile

(¹) *Phil. Trans.*, 1807, p. 131.

(²) SYLVESTER et SERRET, *Comptes rendus Acad. Sc.*, t. 52, p. 307.

de voir que

$$\frac{V_{nv+m+1}}{nv+m+1} - (n)_1 \frac{V_{\overline{n-1}v+m+1}}{\overline{n-1}v+m+1} + (n)_2 \frac{V_{\overline{n-2}v+m+1}}{\overline{n+2}v+m+1} + \ldots + (-1)^n \frac{V_{m+1}}{m+1} \equiv 0$$
$$(\bmod \overline{p^{i+1}}^n), \qquad m = n(i+1).$$

Lorsque $i = 0$, nous obtenons la congruence de Kummer [1]. Glaisher donne ce théorème pour $n = 1$, $i = 0$ dans plusieurs articles [2]; il est certain qu'il ignorait les résultats auxquels était arrivé Kummer.

En donnant à $m + 1$ des valeurs diverses, on obtient quelques résultats intéressants.

Soit $m + 1 = p^i + p^a$ (a étant un nombre entier), $n = 1$; $m + 1$ ne contient pas $p - 1$ en facteur et est pair.

$$\frac{V_{p^i+p^a}}{p^{i+1}+p^a} \equiv \frac{V_{p^i+p^a}}{p^i+p^a} \qquad (\bmod p^{i+1}), \qquad a = i;$$
$$\frac{V_{p^i(p+1)}}{p^i(p+1)} \equiv \frac{V_{2p^i}}{2p^i} \qquad (\bmod p^{i+1}), \qquad a = i+1;$$
$$\frac{V_{2p^{i+1}}}{2p^{i+1}} \equiv \frac{V_{p^i(p+1)}}{p^i(p+1)} \qquad (\bmod p^{i+1});$$

mais

$$V_{2p} \equiv 0 \qquad (\bmod p).$$

En donnant successivement à i les valeurs 1, 2, 3, ..., n, nous obtenons

$$V_{2p^n} \equiv 0 \qquad (\bmod p^n).$$

Soit $m + 1 = p^i(\lambda\sqrt{p-1} + 2\mu)$, où μ n'est pas égal à zéro et $2\mu < p - 1$,

$$\frac{V_{p^i(\lambda\sqrt{p-1}+2\mu)}}{p^i(\lambda\sqrt{p-1}+2\mu)} \equiv \frac{V_{2\mu}}{2\mu} \qquad (\bmod p^{i+1});$$

si $\lambda = 2\mu$,

$$\frac{V_{2\mu p^{i+1}}}{2\mu p^{i+1}} \equiv \frac{V_{2\mu}}{2\mu} \qquad (\bmod p^{i+1});$$

si $\mu = 1$,

$$\frac{V_{2p^{i+1}}}{2p^{i+1}} \equiv \frac{V_2}{2} \equiv \frac{1}{12} \qquad (\bmod p^{i+1}).$$

---

(1) *Journal de Crelle*, vol. 41, p. 371.
(2) *Quart. Journal*, vol. XXXI, p. 253

Généralement, comme 2μ est au plus égal à $p-2$ et comme, d'après le théorème de Staudt,

$$V_{2\mu} = \text{entier} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2\mu+1},$$

si 2μ est un nombre premier $\frac{V_{2\mu}}{2\mu}$ ne contiendra pas p au dénominateur; d'où

$$V_{2\mu p^{i+1}} \equiv 0 \pmod{p^{i+1}}$$

tant que $2\mu < p-1$.

Adams [1], dans l'Introduction de sa Table agrandie des nombres de Bernoulli, fait allusion au théorème que, lorsque V_{2n} contient p et non $p-1$, il est divisible par p, et il suppose que le résultat compris dans les limites de ses Tables est vrai, en général, ces dernières allant jusqu'à V_{124}.

Dans tous les résultats ci-dessus p doit être un nombre premier plus grand que 3.

J'ai obtenu le résidu de V_{2n} au module p^{i+1} quand

$$2n = s - p^i(p-1),$$

ce qui complète le traitement général des nombres de Bernoulli; le résultat, qui fait pendant au théorème de Sylvester sur les résidus des nombres eulériens, est susceptible d'un certain nombre de déductions qui seraient trop longues pour le présent Mémoire.

Les nombres d'Euler sont particulièrement intéressants du fait qu'ils sont entiers, et que, contrairement aux nombres de Bernoulli, ils sont complètement périodiques; il vaut la peine de signaler que les nombres d'Euler et de Bernoulli sont des cas spéciaux de nombres que Cesàro [2] appelle « les nombres ultra-Bernoulliens et ultra-Eulériens » et dont les propriétés ont un rapport marqué avec les nombres plus familiers de Bernoulli.

Je compte donner plus tard certains résultats généraux sur la division de nombres dans lesquels ces nombres jouent un rôle important.

Je définirai les nombres d'Euler comme suit :

$$\frac{2}{e^x + e^{-x}} = 1 + E_2 \frac{x^2}{\lfloor 2} + E_4 \frac{x^4}{\lfloor 4} + \ldots + E_{2n} \frac{x^{2n}}{\lfloor 2n} + \ldots;$$

---

[1] *Journal de Crelle*, vol. 85, p. 269.

[2] *Nouvelles Annales*, t. V, p. 312-317.

$x < \frac{\pi}{2}$ donne une série convergente. Lorsqu'on l'exprime en termes des différences des zéros,

$$E_{2n} = \sum_{s=1}^{s=2n} (-1)^s \frac{\Delta^s 0^{2n}}{2^{s+1}} \cos \overline{p+1} \frac{\pi}{4}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$E_{2n} = \sum_{s=1}^{s=2n} (-1)^s \frac{\Delta^s 0^{2n}}{2^{s+1}} \left[(1+\sqrt{-1})^{s+1} + (1-\sqrt{-1})^{s+1} \right],$$

on peut avec avantage écrire cette série comme suit :

$$E_{2n} = \sum_{1}^{2n} (-1)^s \Delta^s 0^{2n} (\alpha^{s+1} + \beta^{s+1}).$$

Le théorème général de congruence s'applique maintenant; après avoir multiplié par une puissance de 2, on obtient

$$E_{2n+nv} - (n)_1 E_{2m+\overline{n-1}v} + (n)_2 E_{2m+\overline{n-2}v} + \ldots + (-1)^n E_{2m} \equiv 0 \pmod{p^{(i+1)n}},$$
$$2m \geq n(i+1), \qquad v = p^i(p-1):$$

si $n = 1$,

$$E_{2m+v} \equiv E_{2m} \pmod{p^{i+1}}, \qquad 2m \geq i+1;$$

si $2m = i$,

$$E_{i+v} \equiv E_i \pmod{p^i}.$$

$2m$ n'est pas soumis à la restriction qu'il doit être un multiple de $p-1$ comme c'était le cas avec les nombres Bernoulliens.

Ce théorème fut donné, sans démonstration, par Sylvester (1) et fut démontré par Stern (2). En mettant pour $2m$ diverses valeurs ces congruences intéressantes deviennent manifestes; si $2m = p^i + p^a$, alors

$$E_{p^{i+1}+p^a} \equiv E_{p^i+p^a} \pmod{p^{i+1}}:$$

si $a = i$,

$$E_{p^{i+1}+p^i} \equiv E_{2p^i} \pmod{p^{i+1}}:$$

si $a = i+1$,

$$E_{2p^{i+1}} \equiv E_{p^{i+1}+p^i} \equiv E_{2p^i} \pmod{p^{i+1}};$$

---

(1) *Comptes rendus Acad. Sc.*, t. 52, p. 213.
(2) *Journal de Crelle*, t. 79, p. 89.

d'où

$$E_{2p} \equiv E_2 \qquad (\operatorname{mod} p),$$
$$E_{2p^2} \equiv E_{2p} \qquad (\operatorname{mod} p^2),$$
$$E_{2p^n} \equiv E_{2p^{n-1}} \qquad (\operatorname{mod} p^n);$$

si $2m = (\lambda - 1)[p^i(p-1) + 2t]$,

$$E_{(p^i(p-1)+2t} \equiv E_{\overline{\lambda-1}p^i(p-1)+2t} \equiv \ldots \equiv E_{p^i(p-1+2t} \qquad (\operatorname{mod} p^{i+1}),$$

où $2t$ peut avoir n'importe quelle valeur, y compris zéro, et

$$E_{p^i(p-1)+2t} \equiv E_{2t} \qquad (\operatorname{mod} p^{i+1}), \qquad 2t \geqq i+1;$$

si $2t = p - 1$,

$$E_{(p^i+1)p-1} \equiv E_{p-1} \qquad (\operatorname{mod} p^{i+1}).$$

Un résultat qui est vrai pour toute fonction périodique et aussi pour les nombres Eulériens est la relation entre les résidus de $E_{p^i(p-1)}$ et de E_{p-1}, le module étant p^{i+1},

$$E_{p-1} \equiv E_{(p^i+1)p-1} \equiv E_{(p^i+2)\overline{p-1}} \equiv E_{(p^i+r)\overline{p-1}} \qquad (\operatorname{mod} p^{i+1}),$$

où i est n'importe quel nombre entier, soit $r = p^i$, d'où

$$E_{2p^i(p-1)} \equiv E_{p-1} \qquad (\operatorname{mod} p^{i+1}).$$

mais

$$E_{rp^i(p-1)} \equiv E_{\overline{r-1}(p^i(p-1)} + \ldots \equiv E_{2p^i\overline{p-1}} \equiv E_{p^i\overline{p-1}} \qquad (\operatorname{mod} p^{i+1}),$$

c'est-à-dire

$$E_{rp^i(p-1)} \equiv E_{p-1} \qquad (\operatorname{mod} p^{i+1}), \qquad p - 1 \geqq i + 1.$$

Je vais démontrer maintenant le très élégant théorème donné par Sylvester dans la Note citée plus haut.

Stern trouve les résultats suivants :

$$E_{2n} \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} p),$$

lorsque $\frac{p-1}{2}$ est pair;

$$E_{2n} \equiv 2 \qquad (\operatorname{mod} p),$$

lorsque $\frac{p-1}{2}$ est impair, $p - 1$ étant un facteur de $2n$.

Le théorème général de Sylvester est

$$E_{2n} \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} p^{i+1}), \qquad \frac{p-1}{2} \text{ pair};$$

$$E_{2n} \equiv 2 \qquad (\operatorname{mod} p^{i+1}), \qquad \frac{p-1}{2} \text{ impair},$$

$p^i(p-1)$ étant un facteur de $2n$.

Après avoir donné sa démonstration, le module étant (p), Stern renvoie au théorème général dans les termes suivants :

« J'ai déjà parlé plus haut de cette généralisation et de son rapport avec la formule simple. »

La généralisation à laquelle il fait allusion est l'extension du théorème de congruence du module p au module p^{i+1} ; il ne donne aucun preuve que le reste sera le même dans le cas du module plus général et il me semble qu'une démonstration complète devrait traiter du module général, vu qu'il y entre des termes qui n'apparaissent pas dans le cas simple.

L'expression $\Delta^n(a0+1)^m$ est employée pour exprimer le résultat $\Delta^n(ax+1)^m$ où, après avoir fait n fois l'opération Δ sur $(ax+1)^m$, la variable x devient égale à zéro.

Il est facile de démontrer que les nombres Eulériens peuvent être écrits comme suit :

$$E_{2n} = \left(1 - \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta^2}{2^2} - \frac{\Delta^3}{2^3} + \ldots + \frac{\Delta^{2n}}{2^{2n}}\right)(20+1)^{2n}.$$

Les propriétés congruentes peuvent se déduire de la formule

$$\Delta^r(20+1)^{2n} = (-1)^r[1^{2n} - (r)_1 3^{2n} + (r)_2 5^{2n} + \ldots + (-1)^s(r)_s(2s+1)^{2n} + \ldots];$$

si $2n = kp^i(p-1)$, alors le théorème de Fermat prouve que

$$(2s+1)^{2n} \equiv 1 \pmod{p^{i+1}}$$

excepté lorsque

$$2s+1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Soit q la plus petite racine de la congruence

$$2x+1 \equiv 0 \pmod{p},$$

or

$$q = \frac{p-1}{2};$$

les autres racines seront

$$q+p, \quad q+2p, \quad \ldots, \quad q+\lambda p, \quad \ldots$$

où λ est exprimé par

$$\lambda p + t = r - q,$$

t étant moindre que p, c'est-à-dire

$$\Delta^r(20+1)^{2n} \equiv (-1)^{q+1+r}[(r)_q - (r)_{q+p} + \ldots + (-1)^\lambda(r)_{q+\lambda p}] \pmod{p^{i+1}},$$

comme

$$1-(r)_1+(r)_2+\ldots+(-1)^r(r)_r=(1-1)^r=0,$$

d'où pour des valeurs de r jusqu'à $r=q$,

$$\Delta^r(2\,0+1)^{2n}\equiv 0 \qquad (\bmod p^{i+1}).$$

Comme $\Delta^r(2\,0+1)^{2n}$ est multiple de $\underline{|r}$ pour des valeurs de r égales ou supérieures à $p(i+1)$, les termes $\Delta^r(2\,0+1)^{2n}$ se divisent par p^{i+1}, mais nous garderons certains de ces termes dans le reste.

En introduisant les valeurs de $\Delta^r(2\,0+1)^{2n}$ et en arrêtant la série quand $r=p^{i+1}-1$

$$2^{2n}\,E_{2n}\equiv-\sum_{r=q}^{r=p^{i+1}-1}(-1)^q\,[(r)_q-(r)_{q+p}+\ldots+(-1)^\lambda(r)_{q+\lambda p}]\,2^{2n-r}$$
$$(\bmod p^{i+1}).$$

Pour illustrer les différentes méthodes de preuves pour le cas général et le cas particulier de $i=0$, considérons d'abord le dernier.

Comme $(r)_{q+p}$ et les plus grandes valeurs n'apparaissent pas,

$$2^{p-1}E_{p-1}\equiv 1+(-1)^{q+1}2^{p-1-q}$$
$$\times\left[1+\frac{q+1}{\underline{|1}}\,\frac{1}{2}+\frac{\overline{q+2}\,q+1}{\underline{|2}}\,\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{\overline{q+1}\ldots p-1}{\underline{|p-q}}\,\frac{1}{2^{p-q}}\right].$$

Dienger [1] donne la série suivante :

$$1+\frac{m}{\underline{|1}}x+\frac{m(m+1)}{\underline{|2}}x^2+\ldots+\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{\underline{|n}}x^n$$
$$=-\frac{1}{(1-x)^m}\left[x^{m+n}-1+\frac{m+n}{\underline{|1}}(1-x)x^{m+n-1}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{(m+n)\ldots\overline{n+2}}{\underline{|m-1}}\,\overline{1-x}^{m-1}x^{n+1}\right],$$

ce qui est vrai lorsque m et n sont des nombres entiers positifs et que x a n'importe quelle valeur, l'unité exceptée.

Si $m+n=p$, tous les termes après les deux premiers contiennent p

---

(1) *Journal de Crelle*, vol. 41, p. 48.

en facteur, soit $x = \frac{1}{2}$, $m = q + 1$,

$$\begin{aligned} E_{p-1} &\equiv 1 + (-1)^q \frac{2^{q+1}}{2^q}(2^p - 1)x^{2p-1} \pmod{p} \\ &\equiv 1 + (-1)^q(1 - 2^p) \pmod{p} \\ &\equiv 1 + (-1)^{q+1}; \end{aligned}$$

d'où pour q pair

$$E_{p-1} \equiv 0 \pmod{p},$$

pour q impair

$$E_{p-1} \equiv 2 \pmod{p}.$$

Cette méthode ne peut pas être appliquée au cas général parce qu'alors tous les termes de la série de Dienger ne se divisent pas par p^{i+1}; il faut en conséquence rechercher une preuve tout à fait différente; l'emploi des racines de l'unité en rapport avec les propriétés congruentes des nombres Bernoulliens fut porté à ma connaissance par une étude d'Hermite [1]. Soit

$$x^p - 1 = (x - 1)(x - \omega_1)(x - \omega_n)\ldots(x - \omega_{p-1})$$

et soit

$$S[f(\omega)] = f(\omega_1) + f(\omega_2) + \ldots + f(\omega_{p-1}),$$

alors il est bien connu que

$$S(\omega^r) = 0 \quad (\text{excepté pour } r = \mu p),$$
$$S(\omega^{\mu p}) = p - 1;$$

d'où

$$S(1 - \omega)^r \omega^{p-q} = \Sigma (-1)^q [(r)_q - (r)_{q+p} + \ldots + (-1)^\lambda (r)_{q+\lambda p}](p - 1),$$

où λ a la même valeur qu'auparavant, c'est-à-dire

$$E_{2q} = 1 - \sum_{r=1}^{r=p^{i+1}-1} \frac{S(1 - \omega)^r \omega^{p-q}}{2^r(p - 1)} \pmod{p^{i+1}},$$

$$1 + \frac{1 - \omega}{2} + \frac{(1 - \omega)^2}{2^2} + \ldots + \frac{(1 - \omega)^{p^{i+1}-1}}{2^{p^{i+1}} - 1} = \frac{1 - \frac{(1 - \omega)^{p^{i+1}}}{2^{p^{i+1}}}}{1 - \frac{1 - \omega}{2}}$$

$$= \frac{2}{1 + \omega} - \frac{2(1 - \omega)^{p^{i+1}}}{2^{p^{i+1}}(1 + \omega)};$$

---

[1] *Journal de Crelle*, vol. 81, p. 94.

$S\left(\frac{\omega^t}{1+\omega}\right)$ prend une forme remarquablement simple que je n'ai pas encore vue, mais qui est probablement connue.

Comme $\omega_t\omega_{p-1-t}=1$,

$$S\left(\frac{\omega}{1+\omega}\right)=S\left(\frac{1}{1+\omega}\right)=S\left(\frac{\omega+1-1}{\omega+1}\right),$$

c'est-à-dire

$$S\left(\frac{\omega}{1+\omega}\right)=\frac{p-1}{2};$$

si t est pair, écrivons

$$\begin{aligned}S\left(\frac{\omega^t}{1+\omega}\right)&=S\left(\frac{\omega^t-1}{\omega+1}\right)+S\left(\frac{1}{1+\omega}\right)\\&=S\left[\frac{(\omega^{\frac{t}{2}}+1)(\omega^{\frac{t}{2}}-1)}{\omega+1}\right]+\frac{p-1}{2};\\&=S\left[\left(\omega^{\frac{t}{2}}+1\right)\left(\omega^{\frac{t}{2}-1}-\omega^{\frac{t}{2}-2}-\ldots-1\right)\right]+\frac{p-1}{2};\end{aligned}$$

si $t<p$, $S(\omega^t)=0$,

$$S\left(\frac{\omega^t}{1+\omega}\right)=-(p-1)+\frac{p-1}{2}=-\frac{(p-1)}{2};$$

pour t impair, la même méthode donne

$$S\left(\frac{\omega^t}{1+\omega}\right)=\frac{p-1}{2};$$

pour $t>p$, soit $t=\mu p+\tau\ (\tau<p)$,

$$S\left(\frac{\omega^t}{1+\omega}\right)=S\frac{\omega^\tau}{1+\omega}=(-1)^{\tau+1}\frac{p-1}{2}.$$

Nous pouvons passer ensuite à l'évaluation de E_{2n}, où

$$2n=kp^i(p-1)>p^{i+1}:$$

$$E_{2n}\equiv 1-\frac{2}{p-1}S\left[\frac{\omega^{p-q}}{(1+\omega)}\right]+\frac{2}{2^{p-1}p-1}S\,\omega^{p-q}\frac{(1-\omega)^p}{(1+\omega)}\pmod{p^{i+1}},$$

comme $q=\frac{p-1}{2}$, $p-q=\frac{p+1}{2}$.

Considérons l'expression

$$\frac{2}{p-1} S \frac{\omega^{p-q}}{2^{p^{i+1}}} (1-\omega)^{p^{i+1}}$$

$$= \frac{2}{(p-1)2^{p^{i+1}}} S \left[\omega^{p-q} - (p^{i+1})_1 \omega^{p-q+1} + \ldots + (-1)^t (p^{i+1})_t \omega^{p-q+t} + \ldots \right].$$

en notant que p^{i+1} est impair, et de là qu'il y a un nombre pair de termes dans la série; le terme entre crochets est égal à

$$\begin{aligned} \pm \frac{1}{2^{p^{i+1}}} \Big[1 &+ (p^{i+1})_1 + (p^{i+1})_2 + \ldots + (p^{i+1})_q \\ &- (p^{i+1})_{q+1} - (p^{i+1})_{q+2} - \ldots - (p^{i+1})_{q+p} \\ &+ (p^{i+1})_{q+p+1} + \ldots + (p^{i+1})_{q+2p} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad + (p^{i+1})_{p^{i+1}-q-1} + \ldots + (p^{i+1})_{p^{i+1}} \Big]. \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la série est formée de p termes positifs suivis de termes négatifs; ceux-ci peuvent être nommés les « vagues de Sylvester » (¹).

Comme les coefficients binomiaux sont égaux de chaque côté et qu'il y a un nombre égal de vagues positives et négatives, la série est égale à zéro et

$$E_{2n} = 1 - \frac{2}{p-1} S \left(\frac{\omega^{p-1}}{1+\omega} \right) \qquad (\operatorname{mod} p^{i+1}).$$

Si $\frac{p+1}{2}$ est impair,

$$S \left(\frac{\omega^{p-q}}{1+\omega} \right) = \frac{p-1}{2},$$

$$E_{2n} = 0 \qquad (\operatorname{mod} p^{i+1});$$

si $\frac{p+1}{2}$ est pair,

$$S \left(\frac{\omega^{p-q}}{1+\omega} \right) = -\frac{p-1}{2},$$

$$E_{2n} = 2 \qquad (\operatorname{mod} p^{i+1}).$$

Il est à remarquer que la preuve est tout à fait générale par rapport à la valeur de q, c'est-à-dire que le théorème est applicable à des

(¹) *Quart. Journal*, vol. I, p. 142.

expressions telles que $\frac{e^x}{e^{ax}+2}$, où a est un nombre premier, puisque dans ce cas q sera la plus petite racine de

$$ax+1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Le cas plus général $\frac{e^x}{e^{ax}+l}$ donne un reste de même forme, mais les vagues ne s'anulent pas l'une l'autre.

Mémoire sur les groupes résolubles;

PAR CAMILLE JORDAN.

Préliminaires.

L'objet principal de notre Traité des Substitutions était la solution des questions suivantes :

PROBLÈME A. — *Construire les groupes résolubles maxima de substitutions entre* N *lettres.*

PROBLÈME B. — *Construire les groupes résolubles primaires maxima contenus dans le groupe des substitutions linéaires homogènes à n variables* (mod. p).

PROBLÈME C. — *Opérer la même construction en n'employant que des substitutions assujetties à reproduire à un facteur près une forme* Φ (mod. p) (*quadratique si* $p = 2$, *bilinéaire gauche à deux systèmes de variables cogrédientes si* p *est impair*) *et de discriminant* $\equiv 0$ (mod. p).

Nous avons obtenu la solution simultanée de ces trois problèmes par l'établissement d'une échelle de récurrence qui les ramène les uns aux autres jusqu'au moment où le résultat peut s'écrire immédiatement.

Dans un Mémoire postérieur (*Memorie della Pontificia Accademia Romana dei Nuovi Lincei*, vol. XXVI), nous avons simplifié cette analyse et montré que les mêmes procédés de réduction ne cesseraient pas de s'appliquer si, dans l'énoncé du problème C, on supposait Φ quadratique et p impair, ou Φ bilinéaire et $p = 2$.

Nous avons toutefois fait remarquer à la fin de ce travail que parmi

les nombreux groupes que fournit la méthode il en est quelques-uns qui ne sont pas maxima. La solution ne sera donc pleinement satisfaisante que lorsqu'on aura indiqué le moyen de les exclure. L'espace limité dont nous disposions ne nous permettant pas de dresser le Tableau complet de ces exclusions nécessaires, nous nous sommes borné à renvoyer aux Chapitres VI et VII de notre Traité, où la question se trouve discutée, sous les restrictions imposées à la forme Φ dans l'énoncé primitif du problème C. Les méthodes employées restent en effet applicables au cas où ces restrictions seraient supprimées. Mais elles sont présentées dans l'Ouvrage cité sous une forme assez confuse, et quelques fautes de calcul s'y sont glissées et sont à rectifier. Nous nous proposons donc de reprendre cette discussion dans le présent travail, qui formera la suite naturelle du Mémoire des *Nuovi Lincei*.

Une première Section sera consacrée à la réduction du problème A, sujet qui n'avait pas été traité dans le Mémoire susdit.

Dans une deuxième Section, nous abordons les problèmes B et C. Après avoir rappelé sommairement, comme la clarté l'exigeait, le procédé de construction des groupes cherchés établi dans le Mémoire des *Nuovi Lincei* (¹), nous donnons le Tableau des précautions à prendre dans l'application de la méthode pour éliminer les groupes qui ne sont pas maxima, et nous montrons que ces exclusions sont nécessaires.

Il est plus malaisé d'établir qu'elles sont suffisantes. Nous y parviendrons en montrant qu'en désignant par L^0 et $\overline{L^0}$ deux quelconques des groupes conservés, L^0 ne peut être contenu dans $\overline{L^0}$ sans lui être identique.

Nous montrerons d'abord (Section III) que si L^0 est un des groupes que la méthode indique comme pouvant être primaire et indécomposable, il le sera en réalité. Il ne pourra donc être contenu dans $\overline{L^0}$ si celui-ci est décomposable.

La proposition à établir étant supposée vraie pour les groupes qui contiennent moins de variables que ceux que l'on considère, nous verrons (Section IV) qu'elle subsiste pour ceux-ci s'ils sont tous deux décomposables.

Reste le cas, plus difficile, où $\overline{L^0}$ est indécomposable. Il exige, pour

(¹) Pour les démonstrations, nous renverrons à ce Mémoire en le désignant par la notation abrégée *N. L.*

être traité, l'étude préliminaire de deux des propriétés de ce groupe.

Nous assignerons tout d'abord (Section V) une limite supérieure au nombre des fonctions linéairement distinctes qu'une de ses substitutions peut laisser inaltérées.

Nous étudierons d'autre part certains de ses sous-groupes abéliens et nous déterminerons une limite supérieure de leur ordre (Section VI).

La combinaison de ces résultats nous permettra d'achever la démonstration du théorème :

1° Si L^0 n'est pas indécomposable (Section VII),

2° S'il est indécomposable (Section VIII).

I. — Réduction du problème V.

1. *Groupes primitifs.* Un groupe résoluble G de substitutions entre N lettres contient par définition un (ou plusieurs) sous-groupes invariants abéliens [1]. Soit F l'un de ces sous-groupes, choisi de telle sorte que son ordre soit minimum; nous l'appellerons la *base* de G.

Si G est primitif, F sera nécessairement transitif. D'ailleurs, chacune de ses substitutions (l'unité exceptée) déplace toutes les lettres. Car soient S une de ces substitutions qui laisse immobile la lettre a; b une autre lettre quelconque; T la substitution de F qui remplace a par b: la substitution $T^{-1}ST = S$ laisssera b immobile. Donc elle se réduit à l'unité.

Soit p un nombre premier dont l'ordre divise celui de F; F contiendra des substitutions d'ordre p, formant un groupe F′ évidemment abélien et invariant dans G. Son ordre sera une puissance de p, telle que p^n.

D'ailleurs, F étant minimum par hypothèse se confond avec F′.

Donc l'ordre de F, et le nombre des lettres de G, qui lui est égal, sont égaux à p^n; F sera dérivé de n substitutions génératrices $A_1, \ldots, A_n$ d'ordre p et ses substitutions auront pour forme générale

$$A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \ldots A_n^{\alpha_n},$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ varient de zéro à $p-1$.

---

[1] Un groupe est dit *abélien* lorsque toutes ses substitutions sont échangeables entre elles. Nous avions donné jadis une autre signification à ce terme: mais l'usage ne l'a pas consacrée.

2. Caractérisons les p^n lettres de G au moyen de n indices $x_1, \ldots, x_n$ variables de 0 à $p-1$ (mod p). La lettre à laquelle on attribuera les indices 00... étant arbitrairement choisie, donnons les indices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ à celle que la substitution $A_1^{\alpha_1} \ldots A_n^{\alpha_n}$ lui fait succéder.

L'égalité

$$A_1^{p_1} \ldots A_n^{p_n} A_1^{\alpha_1} \ldots A_n^{\alpha_n} = A_1^{p_1+\alpha_1} \ldots A_n^{p_n+\alpha_n}$$

montre que cette même substitution remplacera la lettre $(x_1, \ldots, x_n)$ par la lettre $(x_1+\alpha_1, \ldots, x_n+\alpha_n)$.

Si $p^n = 2$, les substitutions de G se réduisent à celles de sa base. Dans le cas contraire, cherchons la forme des nouvelles substitutions que G peut contenir.

3. Soit S l'une d'elles. Elle transformera

$$A_i \quad \text{en} \quad \prod_{k=1}^{k=n} A_k^{a_{ik}} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

(le déterminant des a n'étant pas nul). Or, la substitution T qui remplace l'indice

$$x_k \quad \text{par} \quad \sum_{i=1}^{i=n} a_{ik} x_i \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

produit ce résultat.

On aura donc $S = TU$, U étant une nouvelle substitution échangeable à tous les A_i, et par suite faisant partie de la base.

Le groupe G s'obtiendra donc par l'adjonction à sa base de substitutions convenablement choisies dans le groupe linéaire homogène. Celles-ci forment un groupe L isomorphe à G et par suite résoluble. Il devra être maximum dans son espèce.

D'ailleurs, on peut transformer G par une substitution linéaire quelconque exécutée sur les variables x. Cette opération revenant à changer le choix des substitutions A génératrices de la base, les divers groupes ainsi obtenus ne seront différents que par la notation.

4. Pour que G soit primitif, il est encore nécessaire que L soit primaire. S'il existait, en effet, une fonction linéaire homogène φ_1 des variables x telle que ses transformées par les diverses substitutions de L s'exprimassent au moyen de m fonctions linéairement distinctes seulement, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, m étant moindre que n, on obtiendrait par un changement de variables un groupe semblable à L dont les substitu-

tions auraient toutes la forme suivante :

$$(1)\qquad \left|\begin{matrix} x_k & a_{1k}x_1 + \ldots + a_{mk}x_m \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_l & a_{1l}x_1 + \ldots + a_{ml}x_m \end{matrix}\right| \quad (k = 1, \ldots, m;\ l = m+1, \ldots, n).$$

et si l'on réunit dans un même système toutes les lettres pour lesquelles les m indices $x_1, \ldots, x_m$ ont les mêmes valeurs, il est clair que les substitutions ci-dessus feraient succéder à l'ensemble des lettres d'un système celui des lettres d'un autre système. Le groupe G ne serait donc pas primitif.

Cette condition est d'ailleurs suffisante. Supposons, en effet, que G ne soit pas primitif. Celles des substitutions de sa base qui ne déplacent pas le système s auquel appartient la lettre $(00\ldots)$ formeront un sous-groupe de la base. Soit p^{n-m} son ordre. Il résultera de la combinaison de $n-m$ substitutions génératrices qu'il est permis de supposer n'être autres que $A_{m+1}, \ldots, A_n$. Les substitutions obtenues par la combinaison de celles-là étant les seules de la base qui ne déplacent pas le système s seront permutées entre elles par celles des substitutions de G qui ne déplacent pas s et en particulier par celles de L [lesquelles laissent immobile la lettre $(00\ldots)$]. Donc les substitutions de L seront de la forme (1), de sorte qu'il ne sera pas primaire.

Enfin, pour que G soit maximum, il faut encore que L soit maximum dans son espèce. On est ainsi ramené au problème B.

3. *Groupes non primitifs.* — Soient G un groupe résoluble, entre N lettres, transitif mais non primitif; $s_1, s_2, \ldots, s_m$ les systèmes, de N lettres chacun, entre lesquelles ses lettres sont supposées se partager.

Celles des substitutions de G qui ne déplacent pas le système s_k sont de la forme S_kT, où S_k est opérée entre les lettres de s_k et T entre les autres lettres. Elles constituent un sous-groupe H_k de G, qui sera résoluble. Les substitutions partielles S_k forment un groupe Γ_k isomorphe à H_k; lui aussi sera donc résoluble.

Or, on peut établir entre les lettres des divers systèmes une correspondance telle que parmi les substitutions de G qui font succéder s_k à s_1 il y en ait une Γ_k où chaque lettre soit remplacée par sa correspondante.

Cela posé, chaque substitution de G est de la forme $VS_1S_2\ldots S_m$; V déplaçant les systèmes en remplaçant chaque lettre par sa correspondante et S'_k étant une substitution opérée entre les lettres de s_k.

Or, on voit aisément que grâce à la correspondance établie :

1° Chacune des substitutions S'_k appartiendra à Γ_k [1] ;

2° Les groupes $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ sont tous semblables ;

3° Les déplacements V des systèmes forment un autre groupe Δ isomorphe à G et par suite résoluble ; elles transforment d'ailleurs les groupes Γ les uns dans les autres.

Le groupe $(\Delta, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_m)$ sera donc résoluble. Mais il contient G. Donc si G est maximum, il se confondra avec lui ; et sa construction reviendra à celle des deux groupes Δ et Γ_1 ayant respectivement m et N' pour nombre de leurs lettres.

Si le groupe G admettait plusieurs répartitions de ses lettres en systèmes, nous supposerons avoir adopté celle où N' est maximum. Dans ce cas Δ sera primitif ; m sera donc une puissance de nombre premier, telle que p^n.

6. Soit $s'_1, s'_2, \ldots$ un autre groupement des lettres en systèmes. Chacun de ces nouveaux systèmes sera contenu en entier dans l'un des anciens. Supposons, en effet, que l'un d'eux s_1 contînt à la fois une lettre a de s_1 et une autre lettre b d'un autre système, tel que s_2. Les substitutions de Γ_1, laissant b immobile, ne déplaceraient pas s'_1. Les lettres de Γ_1, qu'elles font succéder à a, appartiendraient donc toutes à s'_1. Il contiendrait donc contre l'hypothèse plus de lettres que s_1.

Soient donc $s_{k1}, \ldots, s_{km'}$ ceux des nouveaux systèmes qui sont contenus dans s_k ; N'' le nombre des lettres de chacun d'eux. La construction de Γ_1 reviendra à celle de deux groupes successifs, l'un Δ' de déplacements d'ensemble des m' systèmes $s_{11}, \ldots, s_{1m'}$, l'autre Γ_{11} entre les N'' lettres de s_{11}.

Si l'on a choisi les systèmes s' de telle sorte que N'' soit maximum, Δ' sera primitif et m' une puissance de nombre premier telle que $p'^{n'}$.

On verra de même que s'il existe un autre groupement des lettres en nouveaux systèmes s'', contenant chacun N''' lettres, chacun d'eux sera contenu dans l'un des systèmes s' ; et que Γ_{11} résulte de la combinaison d'un groupe Δ'' de substitutions d'ensemble entre ceux des systèmes s'' qu'il contient (lequel sera primitif si N''' est maximum)

---

[1] En effet soit s_k le système auquel V fait succéder s_k. Le groupe G contient la substitution $U_k^{-1} U_1 V S'_1 S'_2 \ldots S'_m$ qui ne déplace pas le système s_k mais effectue sur ses lettres l'opération S'_k.

et d'un groupe Γ_{11} de substitutions opérées sur l'un des systèmes s'' que Γ_{11} contient.

Poursuivant ainsi jusqu'à ce qu'on ait épuisé le nombre des groupements possibles en systèmes, on arrivera à un dernier groupe $\Gamma_{11}\ldots$ qui sera primitif comme les Δ. D'où la règle suivante pour la construction des groupes non primitifs maxima :

Décomposer N *en un produit de facteurs successifs* $m, m', \ldots, m^t$ *dont chacun soit une puissance d'un nombre premier; construire des groupes primitifs* $\Delta, \Delta', \ldots \Delta^t$ *de substitutions entre* m *systèmes* s, *puis entre* m' *systèmes* s', *etc.; enfin, entre les* m^t *lettres du dernier système* s^t; *le groupe cherché sera de la forme*

$$(\Delta, \Delta' \ldots, \Delta^t)$$

7. Pour qu'il soit maximum, il faut évidemment que chacun des groupes $\Delta, \Delta', \ldots$ le soit; mais il devra en être de même pour chacun des groupes $(\Delta^k, \ldots, \Delta^t)$. Or, cela n'aurait pas lieu si, dans la suite des nombres $m, m', \ldots$, deux nombres consécutifs étaient égaux à 2.

Supposons, en effet, qu'on ait $m = m' = 2$.

Nous aurons deux systèmes s_1, s_2 que Δ permute entre eux; s_1 contiendra deux systèmes s', soient s_{11}, s_{12}, que Γ_1 permute entre eux; s_2 en contient deux autres s_{21}, s_{22} que Γ_2 permute entre eux. Les substitutions de G opéreront donc entre les quatre systèmes s' huit permutations seulement sur les 24 qu'on peut concevoir, lesquelles forment un groupe résoluble D. Le groupe $G = (\Delta, \Delta, \Gamma_{11})$ ne sera donc pas maximum, étant contenu dans le groupe plus général (D, Γ_{11})

Nous pouvons donc formuler cette règle :

Premier cas d'exclusion. — Dans la construction des groupes non primitifs, on rejettera toutes les décompositions $N = mm'\ldots$ où deux facteurs consécutifs sont égaux à 2.

Nous verrons tout à l'heure que cette précaution suffit pour éliminer les groupes non maxima.

8. *Groupes intransitifs.* — Soit G un groupe résoluble non transitif. Groupons ses lettres en classes, en réunissant celles que les substitutions de G permutent entre elles. Chacune de ces substitutions sera un produit de substitutions partielles $S_1, S_2, \ldots$ opérées respectivement entre les lettres des classes $1, 2, \ldots$ Or, il est évident : 1° que les substi-

tutions partielles S_k forment un groupe résoluble et transitif G_k; 2° que le groupe $(G_1, \ldots, G_k, \ldots)$ l'est également. Il contient, d'ailleurs, G. Donc si G est maximum il sera de cette forme. Ainsi, pour former les groupes cherchés, on aura à décomposer N en une somme de nombres $N = N_1 + N_2 + \ldots$ et à construire des groupes résolubles et transitifs $G_1, G_2, \ldots$

Le cas où quelqu'un des nombres N_i serait égal à 1 n'est pas exclu. Le groupe correspondant G_i se réduirait à la substitution 1.

Pour que G soit maximum, il faut que chacun des groupes partiels G_i le soit. Mais cela n'est pas suffisant.

Deuxième cas d'exclusion. — Le groupe G, ainsi formé, devra être rejeté :

1° Si deux des groupes partiels G_1, G_2 sont semblables:

2° Si $G_2 = (\Delta, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots)$ est un groupe décomposable, les groupes $\Gamma_1, \Gamma_2 \ldots$ étant semblables à G_1, et au nombre de 2 ou 3.

Désignant en effet par D le groupe des substitutions d'ensemble qui peuvent être opérées entre les deux, trois ou quatre systèmes de lettres qui figurent dans les groupes semblables G_1, G_2 ou G_1, Γ_1, Γ_2 ou G_1, Γ_1, Γ_2, Γ_3, le groupe intransitif (G_1, G_2) serait contenu dans le groupe transitif plus général dérivé de D et de G_1.

Nous aurons à montrer que cette précaution suffit.

9. Les deux cas d'exclusion signalés plus haut sont les seuls à considérer.

Nous allons démontrer en effet que, si G et $\overline{G}$ sont deux groupes résolubles entre N lettres, fournis par la méthode précédente, G ne peut être contenu dans $\overline{G}$, s'il ne lui est identique.

Cette proposition étant supposée établie pour les groupes de moins de N lettres, sera évidemment vraie pour N lettres, si $\overline{G}$ n'est pas transitif.

S'il est transitif, divers cas seront à distinguer.

10. Premier cas : *$\overline{G}$ n'est pas primitif.* — Soient $\overline{s}_1, \ldots, \overline{s}_m$ les systèmes entre lesquels ses lettres sont réparties. On obtiendra $\overline{G}$ en combinant des groupes semblables $\overline{\Gamma}_1, \ldots, \overline{\Gamma}_m$ opérés dans l'intérieur de chaque système avec un groupe $\overline{\Delta}$ de déplacements d'ensemble.

Supposons, pour fixer les idées, que G, contenu dans $\overline{G}$, soit intran-

sitif. Il résultera de la réunion de groupes transitifs $G_1, G_2, \ldots$, contenant chacun une partie des lettres de $\overline{G}$.

Les lettres de chacun des systèmes $\overline{s}_1, \ldots, \overline{s}_m$ appartiendront toutes à un seul de ces groupes partiels. Supposons, en effet que, parmi les lettres de $\overline{s}_1$, les unes, telles que a, figurent dans G_1 et les autres, telles que b, figurent dans G_2. Les substitutions de G_1 laissant b immobile, ne déplaceront pas le système $\overline{s}_1$. Les diverses lettres qu'elles font succéder à a appartiendraient donc à ce système. Donc $\overline{s}_1$ contiendrait toutes les lettres de G_1; il contiendrait de même celles de G_2.

Le groupe intransitif (G_1, G_2) serait donc contenu dans le groupe transitif $\overline{\Gamma}_1$ qui a moins de N lettres, ce qui est impossible, par hypothèse.

Cela posé, soient $s_1, \ldots, \overline{s}_k$ ceux des systèmes $\overline{s}$ qui figurent dans G_1. Les lettres de G_1 admettant ce groupement en systèmes, G_1 sera formé par la réunion de groupes semblables $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ de substitutions opérées à l'intérieur de ces systèmes avec un groupe Δ_1 de déplacements d'ensemble. Les groupes $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ étant respectivement contenus dans les groupes $\overline{\Gamma}_1, \ldots, \overline{\Gamma}_k$, qui contiennent moins de N lettres, leur seront identiques.

Chacun des autres groupes partiels $G_2, \ldots$ résultera de même de la combinaison d'une partie des groupes $\overline{\Gamma}$ avec un groupe Δ_2 de déplacements d'ensemble opérés entre les systèmes correspondants.

Donc G sera formé par l'ensemble des groupes $\overline{\Gamma}$ joints au groupe $(\Delta_1, \Delta_2, \ldots)$ des déplacements d'ensemble qu'il fait subir aux systèmes $\overline{s}$.

Ce groupe $(\Delta_1, \Delta_2, \ldots)$ devra être contenu dans $\overline{\Delta}$ qui n'opère que sur m objets. Il lui sera donc identique. Cela est impossible si G est intransitif comme nous l'avions supposé. S'il est transitif, on n'aura qu'un seul groupe Δ_1, identique à $\overline{\Delta}$ et G sera identique à $\overline{G}$.

II. Deuxième cas : *$\overline{G}$ est primitif, mais G ne l'est pas.* — On aura $N = p^n$, et les substitutions de $\overline{G}$ seront de la forme linéaire

$$S = |x_k \quad \Sigma_i a_{ik} x_i + z_k| \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Cherchons combien une substitution de cette forme peut laisser de lettres immobiles.

On aura à satisfaire aux relations

$$x_h \equiv \Sigma_i a_{ih} x_i + z_h \pmod{p}.$$

Si elles sont identiques, S se réduit à l'unité. Dans le cas contraire, supposons qu'elles se réduisent à $n - m$ relations distinctes. Elles détermineront $n - m$ variables en fonction des autres qui resteront arbitraires, ce qui donne p^m solutions. Ce nombre ne peut en aucun cas surpasser $\frac{1}{2} p^n = \frac{1}{2} N$.

Donc, toute substitution de $\overline{G}$ (sauf l'unité) déplace au moins la moitié des lettres. Il en sera de même pour les substitutions de G, s'il s'y trouve contenu.

Donc G ne peut être transitif, et non primitif, car il s'obtiendrait en combinant deux groupes successifs Δ et Γ_1, ce dernier étant primitif et borné aux lettres d'un seul système. Or, pour que Γ_1 ne contînt pas de substitutions déplaçant moins de $\frac{1}{2}$ N lettres, il faudrait évidemment : 1° qu'il n'y eût que deux systèmes : 2° que Γ_1 se réduisît à sa base et, par suite, ne contînt que deux lettres. Or, les groupes $G = (\Delta, \Gamma_1)$, ainsi formés, ont été exclus.

12. Supposons donc G intransitif et formé de la réunion des groupes transitifs $G_1, G_2, \ldots$ Chacun de ceux-ci devra être primitif et contenir au moins la moitié des lettres s'il en contient plus d'une. S'il en contient juste la moitié, il devra se réduire à sa base. Enfin, deux de ces groupes ne peuvent être semblables, ce cas étant exclu.

La seule hypothèse qui satisfasse à toutes ces conditions est qu'on ait deux groupes partiels G_1, G_3, dont le premier soit primitif et contienne $p^n - 1$ lettres, la dernière figurant seule dans G_2.

G_1 étant primitif, le nombre de ses lettres sera une puissance d'un nombre premier, telle que q^m, et sa base B formera un groupe abélien, d'ordre $q^m = p^n - 1$, dérivé de m substitutions génératrices d'ordre q.

Les substitutions de B laissent d'ailleurs immobile une même lettre de $\overline{G}$ et l'on peut supposer que ce soit celle qu'on a affectée des indices $0, 0, \ldots$. Ces substitutions appartiendront donc au groupe linéaire homogène L qui, combiné à la base $\overline{B}$ de $\overline{G}$, constitue ce groupe.

13. Or nous aurons à faire plus loin (Section VI) une étude appro-

fondie des groupes abéliens que peut contenir un groupe $\overline{L}$. Parmi les résultats qu'elle nous donnera, figure (**80**) le suivant, que nous admettrons provisoirement, à titre de postulat.

Pour qu'un groupe abélien contenu dans $\overline{L}$ soit d'ordre $p^n - 1$, il faut qu'il résulte des puissances d'une seule substitution, de la forme

$$S = [x_0, \ldots, x_r, \ldots \quad ix_0, \ldots, i^{p^r} x_r, \ldots] \qquad (r = 0, \ldots, n-1),$$

i étant une racine primitive de la congruence

$$i^{p^n - 1} \equiv 1 \pmod p$$

et $x_0, \ldots, x_{n-1}$ des variables conjuguées.

On aura donc nécessairement $m = 1$, et G_1 formé des substitutions linéaires

$$[X \quad aX + b] \qquad (\bmod q),$$

aura pour ordre

$$q(q-1) = (p^n - 1)(p^n - 2).$$

Ses substitutions sont, d'ailleurs, permutables à B, lequel est formé des puissances de la substitution S. Or, les seules substitutions de $\overline{G}$ qui soient permutables à B s'obtiennent en joignant à S la substitution

$$[x_r \quad x_{r+1}] \qquad [r = 0, 1, \ldots, n-1 \pmod p]$$

Elles forment un groupe d'ordre $(p^n - 1)n$, lequel devrait contenir G; d'où la condition

$$n \leq p^n - 2,$$

laquelle n'est satisfaite que si $p = 2$, $n = 2$, ou $p = 3$, $n = 1$; mais ce sont des cas exclus.

14. Troisième cas. — *$\overline{G}$ est primitif ainsi que G.*

Soient $\overline{B}$ la base de $\overline{G}$; $\overline{L}$ le groupe primaire qu'il faut lui adjoindre pour obtenir $\overline{G}$.

Les substitutions de G seront de la forme ST, S appartenant à $\overline{L}$ et T à $\overline{B}$. Les substitutions partielles S formeront un groupe L, contenu dans $\overline{L}$; et, G étant supposé primitif, L sera primaire.

On en conclut que la base B de G est identique à $\overline{B}$.

Supposons, en effet, qu'il en soit autrement; et soient $S_1, T_1, S_2, T_2, \ldots$

les substitutions génératrices de B. Celles des substitutions partielles S_1, S_2, ... qui ne se réduisent pas à l'unité sont d'ordre p et forment un groupe abélien A invariant dans L.

Soit S_1 l'une d'elles. Elle permute les unes dans les autres les $p^n - 1$ fonctions $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$. Leur nombre étant premier à p, quelques-unes d'entre elles seront nécessairement inaltérées. Supposons que parmi ces fonctions inaltérées il y en ait h distinctes $x_1, \ldots, x_h$. Les fonctions $a_1x_1 + \ldots + a_hx_h$ seront également inaltérées et leur nombre $p^h - 1$ sera premier à p.

Soit S_2 une seconde substitution échangeable à S_1. Elle permutera ces fonctions entre elles et en laissera nécessairement d'inaltérées.

Poursuivant ainsi, on voit qu'il existe des fonctions linéaires $a_1x_1 + \ldots + a_ix_i$ inaltérées par toutes les substitutions S. Les substitutions de L, étant permutables à A, transformeront ces fonctions les unes dans les autres; L_1 ne serait donc pas primaire.

L'identité des bases $\overline{B}$ et B étant ainsi établie, L sera contenu dans $\overline{L}$; mais la construction le suppose maximum; donc $L = \overline{L}$.

II. Réduction des problèmes B et C. Exclusions nécessaires.

15. Le problème A se trouve ramené, par ce qui précède, au problème B. Celui-ci présente, d'ailleurs, avec le problème C, une analogie si étroite que nous abrégerons l'exposition en les traitant simultanément.

Le problème C se subdiviserait en deux autres, suivant que la forme invariante $\Phi \bmod p$ est une forme bilinéaire Φ_b ou une forme quadratique Φ_q. Mais nous pourrons presque toujours faire disparaître cette distinction par l'introduction dans les formules d'un entier τ égal à zéro si Φ est quadratique, à 1 si Φ est bilinéaire.

Le discriminant de Φ devant être $\neq 0 \bmod p$, le nombre n des variables sera nécessairement pair : 1° si $\tau = 1$, 2° si $\tau = 0$, mais $p = 2$.

Les formes Φ_q (mod p) appartiennent à deux types distincts, suivant le caractère quadratique de leur discriminant. Si n est un nombre pair $2m$, celles du premier type sont réductibles à la forme

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_my_m$$

et celles du second type à la forme

$$x_1y_1 + \ldots + x_{m-1}y_{m-1} + x_m^2 - gy_m^2 \qquad (g \text{ racine primitive de } p)$$

si p est impair, ou à la forme

$$x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m + x_m^2 + y_m^2$$

si $p = 2$.

A ces deux types de formes correspondront deux types différents de groupes invariantifs.

Il n'y a pas lieu de retenir cette distinction si n est impair. Car bien qu'on ait encore deux types de fonctions, ils sont invariables par les mêmes substitutions.

16. Une forme Φ étant donnée, soit L l'un des groupes invariantifs cherchés. Si p est impair, chaque substitution S de L laissera Φ absolument invariable, auquel cas nous dirons qu'elle est *propre;* ou la multipliera par un facteur de la forme g^ρ, g étant une racine primitive de p. Nous dirons que cette substitution est *impropre* et *appartient à l'exposant* ρ.

Le groupe L sera d'exposant 1 s'il contient une substitution S d'exposant 1 ; il résultera de la combinaison de S avec un sous-groupe L^0 formé de ses substitutions propres.

Dans le cas contraire, désignons par g la substitution qui multiplie toutes les variables par g et la forme Φ par g^2. Étant échangeable à toute substitution linéaire, elle appartiendra nécessairement à L supposé maximum. L sera donc d'exposant 2 et s'obtiendra par la combinaison de g avec L^0.

Si $p = 2$, ou si l'on n'a pas de forme invariante, toutes les substitutions de L devront être considérées comme propres et $L = L^0$.

Voici enfin une dernière proposition sur laquelle nous aurons à nous appuyer (Voir le *Journal de Liouville*, 6e série, t. I, 1905, p. 276 à 284).

Le groupe K, *formé par toutes les substitutions qui laissent invariante une forme quadratique* Φ mod 2, *possède un seul sous-groupe invariant* K', *d'ordre moitié moindre et formé par les substitutions paires de* K [1].

Le cas où Φ ne contient que quatre variables fait exception. Dans ce

---

[1] Une substitution est dite *paire* ou *impaire* suivant que le nombre des fonctions linéaires distinctes qu'elle multiplie par des facteurs constants (égaux ou non) est pair ou impair.

cas, K a pour facteurs de composition 2 . 2 . 3 . 2 . 3 et ne contient aucune substitution d'ordre 8.

17. Ces préliminaires posés, rappelons brièvement le procédé de construction des groupes cherchés, tel qu'il a été établi dans le *Mémoire des Nuovi Lincei*.

Un groupe L de substitutions linéaires à n variables est dit *non indécomposable*, si les variables auxquelles il est rapporté peuvent être choisies de telle sorte qu'elles se répartissent en systèmes $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_m$ contenant chacun n' variables et tels :

1° Que toute substitution de L remplace les fonctions linéaires des variables de chaque système par des fonctions linéaires des variables d'un même système;

2° Que la forme invariante Φ (s'il y en a une) soit une somme de fonctions partielles $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ ne contenant chacune que les variables d'un seul système.

Le cas où chaque système serait formé d'une seule variable n'est pas exclu.

Ceux des groupes à construire qui sont de cette sorte sont des deux espèces suivantes (*N. L.*, § III).

18. *Groupes semi-primaires.* — Leur existence suppose celle d'une forme invariante ayant pour expression $\Phi_1 + g\Phi_2$ où Φ_1, Φ_2 sont des fonctions semblables, contenant, l'une, les variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n'}$ et l'autre les variables $y_1, y_2, \ldots, y_{n'}$.

Construisons un groupe L_1 primaire, résoluble et maximum parmi ceux qui admettent Φ_1 comme forme invariante et sont d'exposant 2. Soit L_1^0 le sous-groupe formé par ses substitutions propres.

Soient L_2, L_2^0 les groupes semblables aux précédents, mais formés avec les variables y.

Le groupe cherché L, qui doit être invariantif par rapport à Φ, sera formé des groupes L_1^0, L_2^0 combinés à la substitution

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & \ldots & y_1, & y_2, & \ldots \\ y_1, & y_2, & \ldots & gx_1, & gx_2, & \ldots \end{vmatrix}$$

laquelle est d'exposant 1. Si Φ est quadratique, elle sera du premier ou du second type suivant que $\left(\frac{-g}{p}\right)^n$ sera égal à 1 ou à -1.

19. *Groupes décomposables.* — Leur construction demande :

1° Celle d'un groupe G transitif et résoluble permutant les divers systèmes $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_m$ en remplaçant chaque variable par sa correspondante :

2° Celle d'un groupe primaire L_1 de substitutions linéaires entre les variables de Σ_1 (assujetties d'ailleurs, s'il y a lieu, à reproduire à un facteur près, une forme Φ_1, auquel cas L_1 résultera de la combinaison d'une substitution impropre S_1 et d'un groupe propre L_1^0).

Soient L_k, S_k, L_k^0, Φ_k ce que deviennent L_1, S_1, L_1^0, Φ_1 lorsqu'on y remplace les variables de Σ_1 par celles de Σ_k. Il est évident que le groupe dérivé de G et de L_1 sera résoluble; qu'il contiendra $L_1^0, \ldots, L_m^0$, ainsi que la substitution $S = S_1 S_2 \ldots S_m$; enfin que le groupe L dérivé de G, S, $L_1^0, \ldots, L_m^0$ admettra la forme invariante

$$\Phi = \Phi_1 \ldots \Phi_m,$$

laquelle sera du premier type si elle est quadratique, à moins que m ne soit impair et les formes $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ du second type.

L'exposant de L sera d'ailleurs égal à celui de L_1.

Si, parmi les divers groupements des variables en systèmes dont le groupe cherché pourrait être susceptible, nous avons choisi l'un de ceux où les systèmes contiennent chacun le moindre nombre de variables, L_1 sera indécomposable; quant à G, nous avons déjà indiqué comment le problème de sa construction peut être résolu, ou tout au moins réduit au problème B. S'il n'est pas primitif, elle dépendra de la construction de groupes primitifs successifs $G_1, \ldots, G_t$ de degrés $q_1, \ldots, q_t$, les nombres q étant des puissances de nombres premiers et leur produit étant m.

Pour que le groupe L ainsi obtenu soit maximum, il faut évidemment que G et L_1 le soient. Donc, dans la suite des facteurs q ne doivent pas figurer deux nombres consécutifs égaux à 2; mais cette condition n'est pas suffisante. Il faut encore que chacun des groupes $(G_k, \ldots, G_t, L_1)$, et en particulier le dernier (G_t, L_1), soit maximum dans son espèce. Cette condition donnera lieu, comme on le verra plus loin, à quelques nouvelles exclusions.

20. Le procédé de construction qui vient d'être indiqué met, d'ailleurs, en lumière divers groupements en systèmes des variables

de L. Il est clair, en effet, que le groupe $(G_1, \ldots, G_k)$ représente des déplacements d'ensemble entre $q_1 \ldots q_k$ systèmes contenant chacun $q_{k+1} \ldots q_l n'$ variables, l'un d'eux étant formé des variables qui figurent dans le groupe $(G_{k+1}, \ldots, G_l, L_1)$.

Ces groupements en systèmes sont, en général, les seuls possibles. Nous aurons toutefois à constater un cas d'exception.

21. *Groupes complexes.* — Soient L, L′, ... des groupes résolubles primaires contenant respectivement n variables $x_1, x_2, \ldots$; n' variables $y_1, y_2, \ldots$, etc. Leur réunion donnera un groupe résoluble de fonctions linéaires de $n + n' + \ldots$ variables.

Si L, L′, ... admettent des formes invariantes $\Phi, \Phi', \ldots$ (toutes quadratiques ou toutes bilinéaires) les substitutions du groupe $L^0 + L'^0 + \ldots$ formé par la réunion de leurs sous-groupes propres n'altéreront pas la forme $\Phi + \Phi' + \ldots$.

Nous dirons qu'un groupe ainsi formé est *complexe*. Il joue un rôle analogue à celui des groupes intransitifs.

Pour qu'il soit maximum, il faut évidemment que chacun des groupes L, L′, ... le soit. Mais on aura un cas d'exclusion pareil au deuxième cas (**8**).

Troisième cas d'exclusion. — Un groupe complexe ne sera pas maximum :

1° Si deux des groupes partiels L, L′ sont semblables;

2° Ou si L′ est un groupe décomposable formé de deux ou trois groupes semblables à L et d'un groupe G de substitutions qui les permutent entre eux.

22. *Groupes indécomposables.* — Soit L un de ces groupes; le groupe L^0, formé par ses substitutions propres, contiendra un sous-groupe invariant F, dit *premier faisceau* de L et formé des puissances d'une substitution génératrice f, dont l'ordre ω sera premier à p (*A. L.*, §§ IV et V).

Divers cas sont à distinguer pour la formation de F :

1° *Il n'y a pas de forme invariante.* — Les variables formeront ν séries conjuguées, de μ variables chacune. Nous représenterons celles de la première série par x_α, l'indice α variant de 0 à $\mu - 1$, et leurs $\nu^{\text{ièmes}}$ conjuguées par x_γ.

Toute substitution réelle devant faire subir aux variables conju-

guées des altérations conjuguées, on simplifiera l'écriture en indiquant seulement ce qu'elle fait succéder à chaque variable de la première série.

Soit i une racine primitive de la congruence

$$i^{p^\nu - 1} \equiv 1 \pmod{p}$$

La substitution f aura la forme

$$f = \{ x_0 \quad i.x_0 \},$$

et son ordre ω sera $p^\nu - 1$.

Les substitutions de L ne pourront être choisies que parmi celles de la forme

$$P^\alpha Q,$$

P désignant la substitution

$$P = \{ x_0 \quad x_1 \},$$

et Q ne déplaçant plus les séries.

Si $\mu = 1$, L sera dérivé des substitutions génératrices f et P, et aura pour ordre ωn, n désignant le nombre des variables.

2° S'il y a une fonction invariante Φ, on pourra distinguer dans les groupes cherchés trois catégories distinctes :

23. *Première catégorie.* — Les variables se partagent en deux systèmes associés dont chacun contient ν' séries de μ variables; $p^{\nu'}$ étant > 1.

Désignons encore par x_r les variables du premier système et par x'_r leurs associées. Si la forme Φ est quadratique, elle appartiendra au premier type; dans tous les cas, les variables d'un même système n'y figureront que linéairement.

Le groupe L sera d'exposant 1, car il contiendra la substitution

$$k = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ x_j & g.x_i \end{vmatrix} \qquad (g \text{ racine primitive de } p).$$

La substitution f sera

$$f = \begin{vmatrix} x_i & i^{p^{\nu'}}.x_p \\ x_i & i^{p^{\nu'}}.x_i \end{vmatrix} \qquad (i^{p^{\nu'}-1} \equiv 1),$$

et son ordre ω sera $p^{\nu'} - 1$.

Les substitutions de L^0 seront de la forme

$$R^\alpha P^\beta Q,$$

où

$$R = \begin{vmatrix} x_r & x_r \\ x_r & (-1)^\xi x_r \end{vmatrix}, \qquad P = \begin{vmatrix} x_r & x_{r+1} \\ x_r & x_{r+1} \end{vmatrix}$$

Q ne déplaçant plus les séries.

Cette substitution Q sera d'ailleurs déterminée par la transformation qu'elle fait subir aux variables x_0 de la première série du premier système; car leurs conjuguées subissent des altérations conjuguées; et leurs associées x'_r devront être soumises à la substitution adjointe, de telle sorte que la forme

$$\sum_r x_r x'_r$$

reste inaltérée.

Si $\mu = 1$, L sera dérivé des seules substitutions génératrices h, f, P, R; et L^0, dérivé de f, P, R, aura pour ordre

$$\omega \cdot 2\nu' = \omega n,$$

n désignant le nombre des variables.

24. *Deuxième catégorie.* — On a encore $2\nu'$ séries, mais elles ne forment qu'un seul système, étant toutes conjuguées (les séries r et $\nu' + r$ sont associées). Si Φ est quadratique, elle sera du second type.

Déterminons i par la congruence

$$i^{p^{\nu'}-1} \equiv 1 \qquad (\bmod p),$$

L contiendra la substitution d'exposant 1

$$h = \left| x_0 \quad i^{\frac{p^{\nu'}-1}{p-1}} x \right|;$$

et la substitution

$$f = h^{p-1} = \left| x_0 \quad i^{p^{\nu'}-1} x_0 \right|$$

sera d'ordre $\omega = p^{\nu'} - 1$.

Les substitutions de L^0 seront de la forme

$$P^\beta Q,$$

Q ne déplaçant pas les séries et P désignant la substitution

$$P = \left| x_0 \quad i^{\frac{p^{\nu}-1}{2}\tau} x_1 \right|.$$

(La substitution $|x_0 \quad x_1|$ ne serait pas propre si Φ était bilinéaire.)

Si $\mu = 1$, L sera dérivé des substitutions k, f, P, et L^0 aura pour ordre

$$\omega . 2\nu' = \omega n.$$

25. *Troisième catégorie.* — Elle n'existe que si p est impair. Il n'y a qu'une série, contenant μ variables x; f les multiplie toutes par le même facteur -1; donc $\omega = 2$.

Si $\mu = 1$, L sera formé des puissances de la substitution

$$|x \quad gx|.$$

La forme Φ sera Ax^2 et L sera d'exposant 2.

Si $\mu > 1$, la nature de Φ et l'exposant de L seront déterminés plus loin.

26. La question posée étant résolue pour $\mu = 1$, il reste à achever la construction du groupe L lorsque $\mu > 1$.

Elle ne sera possible que si tous les facteurs premiers de μ divisent ω; et le groupe L répondra à l'une des décompositions de μ en un produit de facteurs

$$\mu = \pi^{\sigma}\pi'^{\sigma'}\ldots$$

π, π', ... étant des nombres premiers, dont quelques-uns peuvent être égaux (*N. L.*, § VII).

Remplaçons l'indice unique x par un système d'indices ε, ε', ..., variables respectivement de 0 à $\pi^{\sigma}-1$ à $\pi'^{\sigma'}-1$, etc. Les substitutions Q, susceptibles de servir à la construction, seront nécessairement de la forme TT'..., où T est de la forme

$$T = \left| |\varepsilon\varepsilon\ldots|_0 \quad \sum_{l} \alpha_{\varepsilon}^{l} |l\varepsilon\ldots|_0 \right|,$$

T' de la forme analogue

$$T' = \left| |\varepsilon\varepsilon\ldots|_0 \quad \sum_{l} \beta_{\varepsilon}^{l} |\varepsilon l\ldots|_0 \right|,$$

etc.

(Les substitutions T sont évidemment échangeables aux substitutions T', ...)

27. Désignons indifféremment par θ une racine de la congruence

$$\theta^{\pi} \equiv 1 \pmod{p}$$

ou la substitution d'ordre π

$$\theta = f^{\frac{\omega}{\pi}} = |[\varepsilon\varepsilon' \ldots]_0 \quad \theta[\varepsilon\varepsilon' \ldots]_0|;$$

L° contiendra un second faisceau h d'ordre $\pi^{2\sigma+1}$ jouissant des propriétés suivantes :

1° Ses substitutions sont de l'espèce T;

2° Il est invariant dans L et ne contient aucun sous-groupe jouissant de cette propriété (sauf celui formé des puissances de θ);

3° Il est dérivé de 2σ substitutions fondamentales $C_1, \ldots, C_{2\sigma}$ satisfaisant aux conditions

$$C_k^{\pi} = \theta^{u_k},$$
$$C_k C_i \equiv C_i C_k \theta^{(C_i C_k)}.$$

L'exposant u_k, que nous appellerons le *caractère* de la substitution C_k, sera toujours nul si π est impair; égal à 0 ou à 1 si $\pi = 2$, d'où $\theta = -1$.

L'exposant $(C_i C_k)$ sera dit l'*exposant d'échange* de C_i avec C_k. On a évidemment

$$(C_i C_k) = -(C_k C_i).$$

Soit

$$S = C_1^{\lambda_1} \ldots C_{2\sigma}^{\lambda_{2\sigma}} \theta^{\lambda}$$

une des substitutions de h. Son caractère (qu'il n'y a lieu de considérer que si $\pi = 2$) sera représenté par la forme quadratique

$$\Psi_{\lambda} = \sum u_i x_i^2 + \sum_{i,k} (C_i C_k) x_i x_k \pmod{2} \qquad (i = 1, \ldots, 2\sigma;\ k = 1, \ldots, i-1),$$

et son exposant d'échange avec une autre substitution de h,

$$S = C_1^{\mu_1} \ldots C_{2\sigma}^{\mu_{2\sigma}} \theta^{\delta}$$

le sera par la forme bilinéaire gauche

$$\Psi_{\lambda} = \Sigma (C_i C_k) \lambda_i \mu_k \pmod{\pi} \qquad (i = 1, \ldots, 2\sigma;\ k = 1, \ldots, 2\sigma).$$

28. Les substitutions fondamentales C_i peuvent d'ailleurs être choisies de telle sorte qu'elles se partagent en σ couples,

$$A_1, \quad \ldots, \quad A_\sigma,$$
$$B_1, \quad \ldots, \quad B_\sigma$$

tels :

1° Que tous leurs exposants d'échange soient nuls, sauf pour deux substitutions d'un même couple, pour lesquels on aura

$$(A_k B_k) = -(B_k A_k) = 1.$$

2° Et, si $p = 2$, que toutes ces substitutions aient pour caractère 0, sauf A_1 et B_1 dont le caractère commun u pourra être égal à 0 ou à 1.

La substitution

$$S = A_1^{x_1} B_1^{y_1} \ldots A_\sigma^{x_\sigma} B_\sigma^{y_\sigma} \theta^\lambda$$

aura alors pour caractère

$$\Psi_q = u(x_1^2 + y_1^2) + \Sigma x_i y_i \qquad (\mathrm{mod}\, 2),$$

forme qui sera du premier ou du second type, suivant que u sera égal à 0 ou à 1.

Et son exposant d'échange avec la substitution

$$S = A_1^{X_1} B_1^{Y_1} \ldots A_\sigma^{X_\sigma} B_\sigma^{Y_\sigma} \theta^\mu$$

sera représenté par la forme bilinéaire

$$\Psi_b = \Sigma(X_i y_i - x_i Y_i) \qquad (i = 1, \ldots, \sigma).$$

29. Remplaçons l'indice ε par σ indices $\xi_1, \ldots, \xi_\sigma$ variables chacun de 0 à $\pi - 1$. Les variables indépendantes $|\xi_1, \ldots, \xi_\sigma, \varepsilon', \ldots|_r$ pourront être choisies, si π est impair, de telle sorte que les substitutions A_k, B_k prennent la forme suivante (les indices non écrits étant inaltérés)

$$A_k = || \ldots \xi_k \ldots|_0 \quad \theta^{\xi_k} [\ldots \xi_k \quad \ldots|_0|,$$
$$B_k \quad || \ldots \xi_k \ldots|_0 \qquad [\ldots \xi_k + 1 \ldots \quad |_0|.$$

Si $\pi = 2$, A_2, B_2, ..., auront encore la même forme; mais si $u = 1$, A_1 et B_1 auront des expressions un peu différentes

$$A_1 = || \xi_1 \ldots|_0 \quad j\theta^{\xi_1} [\xi_1 \ldots|_0|,$$
$$B_1 = || \xi_1 \ldots|_0 \quad (\alpha + \beta j \theta^{\xi_1}) [\xi_1 + 1 \ldots||.$$

j étant racine primitive de la congruence $j^5 \equiv 1 \bmod p$ et α, β un système de solutions (choisi à volonté) de la congruence

$$\alpha^2 + \beta^2 \equiv -1 \qquad (\bmod p).$$

L^0 contiendra également d'autres seconds faisceaux d'ordre $\pi'^{2\sigma'+1}, \ldots$ qui pourront être ramenés à des formes normales analogues à la précédente. L'ensemble de ces premiers et seconds faisceaux constituera le *noyau* de L.

Ce noyau une fois construit, la forme invariante Φ sera déterminée à un facteur constant près. Si L est de troisième catégorie, on aura nécessairement

$$\tau - \Sigma u \equiv 0 \qquad (\bmod 2),$$

car si cette condition n'était pas remplie, Φ serait identiquement nulle.

50. La réduction précédente à une forme normale des substitutions génératrices du noyau de L nous a servi comme moyen de démonstration dans le Mémoire des *Nuovi Lincei*. Mais ici, où nous nous bornons à en résumer les résultats, il n'est pas nécessaire de la supposer exécutée. L'exposition y gagnera en clarté.

Soient $\mathfrak{X}$ le groupe des substitutions homogènes à 2σ variables mod π qui reproduisent, à un facteur près, la forme Ψ_a si $\pi > 2$ ou la forme Ψ_b si π est impair, $\mathfrak{X}^0$ le groupe de ses substitutions propres :

$$\mathfrak{S}_k = [x_k, x_{k+1}] \qquad (k = 1, \ldots, 2\sigma)$$

les substitutions génératrices de sa base $\mathfrak{B}$. A chaque substitution propre $\mathfrak{T}$ du groupe $\mathfrak{X}^0$, laquelle transforme $\mathfrak{S}_k$ en

$$\mathfrak{S}_k = \mathfrak{S}_1^{a_{1k}} \ldots \mathfrak{S}_{2\sigma}^{a_{2\sigma k}} \qquad (k = 1, \ldots, 2\sigma),$$

correspond une substitution de l'espèce T [1], définie aux puissances près de f, qui transforme de la même manière les substitutions

$$G_1, \quad \ldots, \quad G_{2\sigma}$$

génératrices de h (*N. L.*, § X).

---

[1] Les substitutions dont la combinaison permet de l'obtenir ont été indiquées (*N. L.*, n° 32).

Cette substitution T serait d'ailleurs facile à obtenir par la méthode des coefficients indéterminés. Si L doit admettre une forme invariante Φ, T ne l'altérera pas, à moins que les conditions ci-dessous ne soient satisfaites simultanément :

1° L est de troisième catégorie ;
2° 2 n'est pas résidu de π ;
3° La substitution $\mathfrak{T}$ est impaire.

Si ces conditions sont réunies, T multipliera Φ par g, racine primitive de p.

Les seules substitutions de l'espèce T qui puissent appartenir à L sont celles ainsi déterminées, jointes à celles dérivées de f et de h. Elles forment un groupe Γ isomorphe au groupe primitif $\mathfrak{G}^0 = (\mathfrak{H}^0, \mathfrak{ab})$, la substitution ι de $\mathfrak{G}^0$ correspondant à l'ensemble des puissances de f.

Nous pourrons dire pour abréger qu'une substitution de Γ est paire ou impaire, suivant que sa corrélative dans $\mathfrak{H}$ est elle-même paire ou impaire.

De là résulte le procédé suivant pour former les substitutions T du groupe cherché.

Construisons un groupe $\mathfrak{L}$ résoluble et maximum contenu dans $\mathfrak{H}$. A ses substitutions propres correspondront dans Γ des substitutions qui seront celles que nous cherchons.

Celles des substitutions de L qui sont de chacune des formes T', ... s'obtiendront de même par la considération de groupes auxiliaires $\mathfrak{L}'$, ... analogues à $\mathfrak{L}$.

31. Nous aurons ainsi obtenu toutes les substitutions de L qui ne permutent pas les séries. Mais s'il y a plusieurs séries, il reste à déterminer celles qui les déplacent. On utilisera à cet effet les substitutions impropres des groupes $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$, ...

Supposons par exemple que L soit de première catégorie. Si l'on peut déterminer dans $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$, ... des substitutions $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}'_1$, ... qui multiplient respectivement les fonctions invariantes Ψ, Ψ', ... par

$$(-1)^2 p^\beta \pmod{\pi}, \quad (-1)^2 p^\beta \pmod{\pi'}, \quad \ldots,$$

on aura dans L une substitution de la forme $R^2 P^\beta TT' \ldots$ correspondante au système des substitutions $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_1$, ...

Pour que cette détermination soit possible, il faut et il suffit

que $(-1)^\alpha p^\beta$ soit résidu quadratique de tous ceux des nombres de la suite $\pi, \pi', \ldots$ pour lesquels le groupe auxiliaire $\mathfrak{G}$ est d'exposant 2.

Cette condition est évidemment satisfaite si $\alpha = 0$, β pair. Le groupe L contiendra donc dans tous les cas une substitution de la forme $P^2 Q$.

Elle devra l'être également pour $\alpha = 1$, $\beta = 0$, ou pour $\alpha = 1$, $\beta = 1$, car si L ne contenait aucune substitution permutant les deux systèmes, il ne serait pas indécomposable. Donc L devra nécessairement contenir une substitution de l'une des deux formes RQ, RPQ.

Si L est de deuxième catégorie, ou n'admet pas de forme invariante, $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}'_1, \ldots$ devront multiplier $\Psi, \Psi', \ldots$ par

$$p^\beta \pmod{\pi}, \qquad p^\beta \pmod{\pi'}, \qquad \ldots,$$

ce qui est possible si β est pair, mais aura lieu également pour $\beta = 1$ si p est résidu de tous ceux des nombres $\pi, \pi', \ldots$ pour lesquels le groupe auxiliaire est d'exposant 2. Dans ce cas seulement, L contiendra une substitution de la forme PQ; mais il en contiendra toujours une de la forme $P^2 Q$.

32. Il existe certains cas où l'on peut montrer *a priori* que certaines substitutions de la forme $R^\alpha P^\beta Q$ (ou de la forme $P^\beta Q$) appartiennent à L.

Supposons en effet que, parmi les substitutions de cette sorte, il en existe une U qui soit échangeable à toutes celles des seconds faisceaux $h, h', \ldots$; et soit S une substitution quelconque de L. La substitution $S^{-1} U^{-1} S U$ sera propre, ne déplacera pas les séries et sera échangeable aux substitutions de $h, h', \ldots$ (car S les transforme les unes dans les autres). Donc elle se réduira à une puissance de f. Donc U est permutable au groupe L; elle y sera donc contenue, car autrement elle pourrait lui être adjointe pour former un groupe plus général.

En particulier, si tous les nombres $\pi, \pi', \ldots$ sont égaux à 2, on vérifie immédiatement que les substitutions

$$P' = P(A_1 B_1)^{\frac{p-1}{2}\alpha} (A_1 B'_1)^{\frac{p-1}{2}\alpha'} \ldots,$$
$$R' = R(A_1 B_1)^\alpha (A'_1 B'_1)^\beta \ldots$$

satisfont aux conditions imposées à U. Elles appartiennent donc à L.

53. Remarquons enfin que, si plusieurs des nombres π, π', ... sont égaux, celles de leurs substitutions qui ont pu être utilisées pour la construction de L formeront un groupe complexe invariantif pour la forme $\Psi' + \Psi'' + \ldots$. Il devra être maximum parmi ceux de cette espèce pour que L le soit. Cela pourra donner lieu à l'application du troisième cas d'exclusion (n° **21**).

54. Nous sommes maintenant en mesure de déterminer l'exposant d'un groupe L de troisième catégorie.

Si $\left(\frac{2}{p}\right) = +1$, cet exposant sera 2, L résultant de substitutions propres, jointes à la substitution qui multiplie toutes les variables par g.

Si $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$, cet exposant ne sera égal à 2 que si les groupes auxiliaires $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$, ... à 2σ, $2\sigma'$, ... variables (mod 2) qui servent à le former et qui laissent invariables les formes quadratiques Ψ', Ψ'', ... (mod 2) ne renferment que des substitutions paires.

Soit $\mathfrak{L}$ l'un de ces groupes. Supposons-le, pour plus de généralité, décomposable. Il sera construit à l'aide d'un groupe Δ de déplacements entre les m systèmes et d'un groupe indécomposable Γ_1 à $2\sigma_1$ variables, $m\sigma_1$ étant égal à σ. Si Γ_1 est de première catégorie (ce qui ne peut avoir lieu que si Ψ est du premier type), ces substitutions sont de la forme $\mathfrak{R}^\alpha \mathfrak{P}^\beta \mathfrak{Q}$, et dans l'une d'elles au moins $\alpha = 1$. Or nous avons montré (*Journal de Liouville*, 7e série, t. II, 1916, p. 275 à 280) que les substitutions Δ, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ sont paires et que $\mathfrak{R}$ est paire ou impaire en même temps que σ_1.

Supposons au contraire que Γ_1 soit de deuxième catégorie, ce qui arrivera nécessairement pour l'un au moins des groupes $\mathfrak{L}$ si Φ est bilinéaire; car, dans ce cas, Σu étant impair, l'un au moins de ces nombres sera égal à 1 et la forme Ψ qui lui correspond sera du second type.

Dans ce cas, L sera d'exposant 1. Nous allons le démontrer par un procédé de récurrence, qui établira en même temps que tout groupe indécomposable de deuxième catégorie à 2σ variables (mod 2) contient une substitution impaire.

En effet, les substitutions de Γ_1 sont de la forme $\mathfrak{P}^\beta \mathfrak{Q}$ et les substitutions Δ et $\mathfrak{Q}$ sont encore paires. Mais ici $\mathfrak{P}$ est impaire. L sera donc d'exposant 1 si $\mathfrak{L}$ contient une substitution où β soit égal à 1. Mais

cela arrivera nécessairement. C'est évident si chaque série dans Γ_1 n'a qu'une variable. S'il y en a plusieurs, la construction de Γ_1 dépendra de celles de groupes Λ, Λ', ... à $2s$ variables (mod ϖ), $2s'$ variables (mod ϖ'), ..., ϖ, ϖ', ... étant des nombres impairs. Pour que Γ_1 ne contînt pas de substitutions de l'espèce demandée, il faudrait : 1° que l'un au moins des groupes Λ, Λ', ..., par exemple Λ, fût d'exposant 2, et par suite de troisième catégorie ; 2° que $\left(\frac{2}{\varpi}\right)$ fût égal à -1. D'ailleurs ϖ étant impair, Λ admet une forme invariante bilinéaire.

Si donc la proposition à démontrer n'était pas vraie pour L, elle ne le serait pas pour Λ, qui a moins de variables.

35. Nous pouvons enfin achever la liste des exclusions nécessaires pour ne conserver que des groupes maxima.

Les groupes suivants, non indécomposables, doivent être rejetés comme contenus dans des groupes indécomposables.

Quatrième cas d'exclusion. — Sont à rejeter tous les groupes non indécomposables qui admettent une forme quadratique invariante Φ ne dépendant que de deux variables.

En effet, si Φ est du premier type, on aura

$$\Phi = xy.$$

Les substitutions invariantives seront de l'une des deux formes

$$[x, y \quad ax, by] \qquad \text{ou} \qquad [x, y \quad ay, bx].$$

Elles dérivent toutes des suivantes :

$$k = [x, y \quad x, gy], \qquad f = [x, y \quad gx, g^{-1}y], \qquad h = [x, y \quad y, x].$$

C'est un groupe résoluble indécomposable de première catégorie.

Si Φ est du second type et p impair, on aura

$$\Phi = x^2 - gy^2.$$

Soit i une racine primitive de la congruence

$$i^{p^2-1} \equiv 1 \qquad (\text{mod } p).$$

On aura $g = i^{p+1}$, et Φ sera le produit des deux facteurs conjugués

$$z_0 = x + i^{\frac{p+1}{2}} y, \qquad z_1 = x - i^{\frac{p+1}{2}} y.$$

Les substitutions invariantives formeront un groupe résoluble indécomposable de deuxième catégorie, dérivé des substitutions

$$k = |z_0, z_1 \quad iz_0, i^p z_1|, \qquad f = k^{p-1}, \qquad P = |z_0, z_1 \quad z_1, z_0|.$$

Si Φ est du second type et $p = 2$, on aura

$$\Phi = x^2 + y^2 + xy,$$

et si l'on pose

$$i^3 \equiv 1 \pmod 2, \qquad z_0 = x + iy, \qquad z_1 = x + i^2 y,$$

on aura encore

$$\Phi = z_0 z_1,$$

et les substitutions invariantives formeront un groupe de deuxième catégorie, dérivé de

$$f = |z_0, z_1 \quad iz_0, i^2 z_1|, \qquad P = |z_0, z_1 \quad z_1, z_0|.$$

Les groupes ci-dessus contenant toutes les substitutions invariantives, tout autre groupe que l'on pourrait obtenir, étant contenu dans ceux-là, ne serait pas maximum.

36. *Cinquième et sixième cas d'exclusion.* — Les groupes décomposables sans forme invariante, où

$$q_i = 2, \qquad p^{n'} = 3 \text{ ou } 5,$$

doivent être rejetés.

En effet, si $p^{n'} = 3$, le groupe en question est contenu dans un groupe indécomposable ayant pour noyau

$$f = |x, y \quad -x, -y|. \qquad \begin{array}{l} A = |x, y \quad x, -y|. \\ B = |x, y \quad y, x|. \end{array}$$

Si $p^{n'} = 5$, il le sera dans le groupe qui a le noyau

$$f = |x, y \quad -x, -y|. \qquad \begin{array}{l} A = |x, y \quad 2x, -2y|. \\ B = |x, y \quad y, -x|. \end{array}$$

37. *Septième cas d'exclusion.* — C'est celui d'un groupe décomposable, où $q_i = 4$, $n' = 1$ et $p = 3$ s'il n'y a pas de forme invariante, ou un nombre impair quelconque, s'il y en a une.

S'il n'y a pas de forme invariante, d'où $p = 3$, le groupe (G_i, Γ_i)

est d'ordre 16-24 et formé des substitutions

$$[x, y, z, u \mid \pm x, \pm y, \pm z, \pm u] \pmod 3,$$

jointes aux 24 permutations des lettres x, y, z, u. Mais il n'est pas maximum, car on voit sans peine qu'il est contenu dans le groupe qui a un premier faisceau dérivé de

$$f = [x, y, z, u \mid -x, -y, -z, -u],$$

et un second faisceau dérivé des quatre substitutions

$$A = [x, y, z, u \mid x, y, -z, -u], \qquad A_1 = [x, y, z, u \mid x, -y, z, -u],$$
$$B = (xz)(yu), \qquad B_1 = (xy)(zu)$$

S'il y a une forme invariante, elle sera quadratique et aura pour expression

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2.$$

Les substitutions propres du groupe donné seront encore de la forme précédente. Il faudra y adjoindre la substitution impropre

$$g = [x, y, z, u \mid gx, gy, gz, gu] \pmod p,$$

où g est une racine primitive de p. Mais le groupe ainsi obtenu est contenu dans le groupe de troisième catégorie dont le noyau est dérivé de f, A, A_1, B, B_1, car celui-ci contient aussi la substitution g.

38. Les groupes suivants, qui, d'après leur mode de construction, pourraient être présumés indécomposables, contiennent un sous-groupe abélien invariant ne résultant pas des puissances d'une seule substitution; ils sont donc contenus dans des groupes décomposables et, par suite, ne sont pas maxima.

Huitième cas d'exclusion. — C'est celui des groupes L de première catégorie où $p'' = 3^2$.

On a ici $\omega = 3^2 - 1 = 8$; donc $\pi = \pi' = \ldots = 2$. L contient la substitution R'P'(**52**), dont la transformée par une substitution quelconque de L sera de la forme R'P'f^2.

D'ailleurs, $(R'P')^2 = (-1)^5$ est échangeable à toute substitution linéaire. On devra donc avoir

$$(R'P'f^2)^2 = (R'P')^2 = (-1)^5.$$

Mais $R'P'$ transformant f en f^{-3}, on aura

$$(R'P'f^{\rho})^2 = (R'P')^2 f^{-2\rho}.$$

Donc

$$-2\rho \equiv 0 \pmod 8, \qquad \text{d'où} \qquad \rho \equiv 0 \pmod 4.$$

Donc les substitutions de L seront toutes permutables au sous-groupe dérivé de f^2 et de $R'P'$. D'ailleurs, ce sous-groupe est abélien; car $R'P'$ transforme f^2 en $f^{-6} = f^2$.

39. *Neuvième cas d'exclusion.* — C'est celui des groupes L de deuxième catégorie, où $p^{\nu} = 2^3$.

On a ici

$$\omega = 2^3 + 1 = 9, \qquad \pi = \pi' = \ldots = 3.$$

La substitution P^2, dont le cube est l'unité, transforme f, A_1, B_1, ... en f^4, $A_1^4 = A_1$, B_1, ... Elle appartient donc à L et ses transformées par les substitutions de ce groupe seront de la forme $P^2 f^{\rho}$.

D'ailleurs

$$(P^2 f^{\rho})^3 = P^6 f^{(1+4+16)\rho} = f^{21\rho}$$

doit être égal à l'unité, d'où la condition

$$21\rho \equiv 0 \pmod 9, \qquad \text{d'où} \qquad \rho \equiv 0 \pmod 3.$$

Donc L admet le sous-groupe invariant dérivé de f^3 et de P^2. Mais ce sous-groupe est abélien, car P^2 transforme f^4 en $f^{12} = f^3$.

40. *Dixième cas d'exclusion.* — C'est celui des groupes L dont un second faisceau h dérive d'un seul couple de substitutions A_1, B_1 ayant le caractère $u = 0$.

Les substitutions de L étant permutables à h, le seront au sous-groupe dérivé de celles de ses substitutions qui sont d'ordre 4, lesquelles sont toutes des puissances de $A_1 B_1$. Donc L admet le sous-groupe invariant abélien dérivé de f, $A_1 B_1$. Ce sous-groupe n'est pas formé des puissances d'une seule substitution, à moins qu'on n'ait $\omega = 2$, d'où $f = -1 = (A_1 B_1)^2$.

Mais dans ce cas L devra encore être rejeté, puisqu'il admet un sous-groupe invariant abélien plus général que F.

41. Les sous-groupes suivants, quoique indécomposables, sont contenus dans d'autres groupes plus généraux.

Onzième cas d'exclusion. — C'est celui des groupes L sans forme invariante où $p^\nu = 3^2$.

On a ici

$$\omega = 3^2 - 1 = 8, \qquad \pi = \pi' = \ldots = 2.$$

L contient la substitution P', dont les transformées seront de la forme $P' f^\rho$. D'ailleurs, $P'^2 = (-1)^{\Sigma u}$ étant échangeable à toute substitution linéaire, on devra avoir

$$P'^2 = (P' f^\rho)^2 = P'^2 f^{4\rho}, \qquad \text{d'où} \qquad 4\rho \equiv 0 \pmod 8.$$

Donc ρ est pair.

Cela posé, si $\Sigma u \equiv 1 \pmod 2$, on aura

$$P'^2 = (f^2)^2 = f^4, \qquad P' f^2 = \ldots = f^2 P' f^4.$$

Donc L sera contenu dans le groupe qui a pour premier faisceau f^4 et pour seconds faisceaux, outre ceux de L, un dernier faisceau, dérivé des génératrices f^2 et P'.

Si Σu était pair, on remplacerait P', dans le raisonnement précédent, par la substitution $P' f$, qui jouit des mêmes propriétés, mais dont le carré est f^4.

42. *Douzième cas d'exclusion.* — C'est celui des groupes L de première catégorie, où $p^\nu = 5^2$.

On a ici $\omega = 5^2 - 1 = 24$, et chacun des nombres premiers $\pi, \pi', \ldots$, divisant ω, sera égal à 2 ou à 3.

La substitution R'P' transforme f en f^{-5} et a pour carré $(-1)^{\tau + \Sigma u}$. Elle est échangeable à toutes les substitutions $A_1, B_1, \ldots$ des faisceaux $h, h', \ldots$. Elle appartient donc à L et sera échangeable à toutes ses substitutions aux puissances près de f (**32**).

Soit $R'P' f^\rho$ l'une de ses transformées. On aura nécessairement

$$(R'P')^2 = (R'P' f^\rho)^2 = (R'P')^2 f^{-4\rho},$$

d'où

$$-4\rho \equiv 0 \pmod{24}, \qquad \rho \equiv 0 \pmod 6.$$

L admet donc un sous-groupe invariant dérivé de f^6 et de R'P'.

D'ailleurs R'P' est échangeable à f^4, car elle la transforme en $f^{-20} = f^4$; elle transforme d'autre part f^6 en $f^{-30} = -f^6$.

Donc, si $\tau + \Sigma u$ est impair, L sera contenu dans un groupe de troisième catégorie ayant pour seconds faisceaux $h, h', \ldots$ et $(f^6, R'P')$.

Si $\tau + \Sigma u$ était pair, $R'P'$ serait d'ordre 2, le faisceau $(f^6, R'P')$ aurait pour caractère zéro, ce qui est inadmissible; mais $R'P'$ pourrait être remplacée dans le raisonnement par $R'P'f^3$, qui est d'ordre 4.

45. *Treizième cas d'exclusion.* — C'est celui des groupes L de première catégorie, où $p^{\nu'} = 5$ et $\tau + \Sigma u = 1 \pmod 2$. On a ici $\omega = 4$, $\pi = \pi' = \ldots = 2$; et L contiendra la substitution R' échangeable à f^2, et dont le carré est $(-1)^{\tau+\Sigma u} = -1$. Les substitutions de L seront toutes permutables au groupe (f, R'); L sera donc contenu dans le groupe de troisième catégorie ayant un premier faisceau formé des puissances de f^2 et les seconds faisceaux $h, h', \ldots (f, R')$.

44. *Quatorzième cas d'exclusion.* — On rejettera également les groupes de deuxième catégorie, où $p^{\nu'} = 3$ et $\tau + \Sigma u = 1$.

La démonstration est identique à celle du numéro précédent, en y remplaçant R' par P'.

43. Deux derniers cas d'exclusion résultent de la considération suivante :

Soit toujours L un groupe résoluble à n variables $(\bmod p)$ et à forme invariante Φ. Ses substitutions propres forment un groupe L^0 ne contenant, si p est impair, qu'une partie des substitutions de L.

Mais si Φ est bilinéaire, on pourra avoir à se servir de L comme groupe auxiliaire pour construire des groupes résolubles à plus de n variables. Nous avons vu que les substitutions de L^0 sont toujours utilisées dans cette construction; mais les substitutions impropres de L ne le seront que sous certaines conditions qui ne seront pas toujours remplies. Si donc il existe un groupe $\overline{L}$ ne contenant pas L, mais tel que $\overline{L}^0$ contienne L^0, certains groupes formés au moyen de l'auxiliaire $\overline{L}$ contiendraient ceux formés de même avec l'auxiliaire L, lesquels ne seraient pas maxima.

46. *Quinzième cas d'exclusion.* — Un groupe L de seconde catégorie où $p^{\nu'} = 7$, $\tau = 1$ et $\Sigma u = 0 \pmod 2$ ne devra être employé comme groupe auxiliaire que si l'une au moins de celles de ses substitutions qui multiplient Φ par un non résidu de 7 est utilisée dans la construction.

On a en effet

$$\omega = 7 + 1 = 8, \qquad \pi = \pi' = \ldots = 2.$$

L contient la substitution P dont le carré est $(-1)^{\tau+\Sigma u} = -1$. Ses transformées par les substitutions de L seront de la forme $P^{\nu} f^{\rho}$; mais ρ sera nécessairement pair.

En effet, les substitutions permutables aux groupes h, h', ... résultant de la combinaison de P avec des substitutions des espèces T, T', ..., forment respectivement des groupes K, K', ... Supposons que le groupe K, par exemple, contînt une substitution T_1 qui transforme P en $P' f^{\rho_1}$, ρ_1 étant impair. L'ordre de K serait divisible par 8 et K résulterait de la combinaison de T_1 avec un sous-groupe invariant formé par celles de ses substitutions qui sont échangeables à P. Les trois premiers facteurs de composition seraient donc égaux à 2.

Or cela est impossible, K étant isomorphe à un groupe $\mathfrak{K}$ formé de l'ensemble des substitutions qui laissent invariante une forme quadratique Ψ à 2σ variables (mod 2). Or un semblable groupe n'a en général que deux facteurs de composition, dont un seul est égal à 2; et si $\sigma = 2$, auquel cas il admet une décomposition plus complète, il n'a aucune substitution d'ordre 8 (**16**).

Les substitutions de L^0 seront donc permutables au faisceau dérivé de f^2 et de P. D'ailleurs,

$$(f^2)^2 = P'^2 = f^4 = -1, \qquad P' f^2 = f^2 P' = f^6.$$

L^0 sera donc contenu dans le groupe $\overline{L^0}$ de troisième catégorie construit sur le noyau

$$f^4, \quad h, \quad h', \quad \ldots, \quad (f^2, P').$$

En adjoignant au groupe L^0 la substitution g qui multiplie toutes les variables par g, racine primitive de 7, on obtiendra un nouveau groupe L' contenant toutes les substitutions de L qui multiplient Φ par un résidu quadratique; et $\overline{L}$, contenant la substitution g, contiendra encore L'.

47. *Seizième cas d'exclusion.* — Un groupe L de première catégorie où $p^{\nu} = 7$, et où les circonstances suivantes sont réunies :

1° Le nombre n des variables de chaque série est une puissance de 2;

2° $$\tau = 1; \qquad \Sigma u = 6 \qquad (\text{mod } 2)$$

ne devra être employé comme groupe auxiliaire que si l'une de celles de ses substitutions qui multiplient Φ par un non résidu de 7 est utilisée pour la construction.

Soit, en effet,

$$f, \quad h, \quad h', \quad \ldots$$

son noyau. L^0 sera formé de la combinaison de substitutions $T, T', \ldots$, échangeables à f avec f (laquelle est d'ordre 6) et une deuxième substitution R', échangeable à celles de $h, h', \ldots$ et transformant f en f^{-1}.

Or, considérons un groupe $\overline{L^0}$ de troisième catégorie admettant des seconds faisceaux $\overline{h}, \overline{h'} \ldots$ ayant respectivement autant de génératrices que h, h' et les mêmes caractères et un dernier second faisceau formé d'un seul couple de génératrices A, B ayant pour caractère 1. La forme $\overline{\Phi}$ qu'il laisse invariante sera d'un type $\overline{\tau}$ défini par la relation

$$\overline{\tau} + 1 + \Sigma u \equiv 0 \pmod 2.$$

Donc $\overline{\tau} = 1$ et $\overline{\Phi}$ sera bilinéaire ainsi que Φ. Le groupe $\overline{L^0}$ est formé de substitutions $\overline{T}, \overline{T'}, \ldots$ jointes à des substitutions échangeables à toutes celles de $\overline{h}, \overline{h'}$; lesquelles résultent de la combinaison de A, B avec deux nouvelles substitutions, l'une U d'ordre 6 transformant circulairement les unes dans les autres les substitutions A, B, AB; l'autre V transformant A, B, U en B, A, U^2.

$\overline{L^0}$ contient un sous-groupe Λ d'indice 4 formé des substitutions U, V, $\overline{T}, \overline{T'}, \ldots$ Mais les substitutions U, V et celles de $\overline{h}, \overline{h'}, \ldots$ ont entre elles les mêmes relations que f, R' et les substitutions de $h, h', \ldots$ On pourra donc, par un changement de variables, transformer U, V, $\overline{h}, \overline{h'}, \ldots$ en f, R', $h, h', \ldots$ et si l'on emploie pour la construction de $\overline{L^0}$ les mêmes groupes auxiliaires que pour celles de L^0, les substitutions $\overline{T}, \overline{T'}, \ldots$ seront également transformées en $T, T', \ldots$; de sorte que L^0 se confondra (à la notation près) avec Λ, et sera contenu dans $\overline{L^0}$.

47 *bis*. Les exclusions précédentes sont suffisantes. Pour le montrer, nous devrons établir :

1° Que si L, $\overline{L}$ sont deux quelconques des groupes conservés, L ne pourra être contenu dans $\overline{L}$ s'il est formé d'une manière différente;

2° Si p étant impair, L, $\overline{L}$ admettent une forme invariante bilinéaire, il faudra, en outre, que L^0 ne soit pas contenu dans $\overline{L^0}$.

La première condition étant toujours satisfaite lorsque la seconde le sera, nous pouvons nous borner le plus souvent à considérer celle-ci, même dans les cas où elle cesserait d'être nécessaire.

Mais cette discussion est longue et difficile. Elle exige l'établissement préalable de diverses propriétés des groupes L^0.

Nous procéderons par récurrence en montrant que les deux propositions précédentes ne pourraient être en défaut, pour les groupes que l'on considère, que si elles l'étaient déjà pour d'autres groupes analogues contenant moins de variables.

L'analyse sera différente suivant que chacun des groupes L^0, $\overline{L^0}$ sera ou non complexe, décomposable ou non. Dans chacun de ces cas nous établirons que $\overline{L^0}$ ne peut contenir L^0 que si certaines inégalités numériques sont remplies. Or elles ne peuvent l'être que dans un petit nombre de cas particuliers dont la discussion relativement facile fera retrouver successivement les cas d'exclusion signalés ci-dessus nécessaires, sans en faire apparaître aucun autre.

III. — Les groupes présumés primaires et indécomposables le sont en réalité.

48. Nous démontrerons dans cette section que les exclusions signalées plus haut comme nécessaires une fois opérées :

1° *Les groupes* L *construits par la méthode des n°s* **22** *à* **31** *comme primaires et indécomposables le sont en réalité.*

2° *S'ils sont susceptibles d'être employés comme groupes auxiliaires, le sous-groupe* L^0 *formé par leurs substitutions propres est encore primaire et indécomposable.*

Rappelons la définition des groupes primaires ou indécomposables.

Un groupe est *primaire*, si y_1 étant une fonction linéaire quelconque des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots$ ses transformées par les substitutions du groupe, il existe toujours n fonctions linéaires distinctes parmi leurs combinaisons linéaires $a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots$

Il est *indécomposable*, s'il n'est pas possible de partager les variables en systèmes

$$(x_1 \ldots x_k), \quad (x'_1, \ldots x'_k), \quad \ldots$$

tels que chaque substitution du groupe remplace les fonctions linéaires

$a_1x_1 + \ldots + a_kx_k$ de l'un de ces systèmes par des fonctions linéaires des variables d'un même système.

Ces définitions supposent que les variables originaires $x_1, \ldots, x_n$ sont réelles. Mais la réduction à la forme normale du noyau de L^0 nous a conduit à leur substituer de nouvelles variables dans l'expression desquelles figure une quantité i le plus souvent imaginaire. Pour conserver les avantages de ce changement, il conviendra d'exprimer les fonctions linéaires à considérer au moyen de ces nouvelles variables, et d'accepter des valeurs imaginaires pour les coefficients $a_1, a_2, \ldots$

49. 1° L^0 *est primaire.* — En effet, soit y_1 une fonction réelle quelconque exprimée en fonction des nouvelles variables. Parmi les combinaisons linéaires de y_1 et de ses transformées, cherchons-en une Y qui contienne le moins de variables possible. Elle n'en contiendra qu'une seule.

Supposons en effet qu'on eût

$$Y = Y_r + Y_s + \ldots,$$

$Y_r, Y_s, \ldots$ contenant respectivement les variables des séries $r, s, \ldots$. La substitution f multipliant Y_r, Y_s par des facteurs différents, on pourra, en combinant Y avec sa transformée par f, obtenir une nouvelle fonction Y' ne contenant plus les variables de la série s.

Donc Y ne peut contenir que les variables $[\xi_1\xi_2\ldots\xi'_1\xi'_2\ldots]_r$ d'une seule série. Si elle en contenait plus d'une, elles différeraient par la valeur de l'un au moins des indices ξ, par exemple ξ_1, et l'on aurait

$$Y = Y_a + Y_b + \ldots,$$

$Y_a, Y_b, \ldots$ contenant respectivement les termes où $\xi = a, b, \ldots$. La substitution A_1 multipliant Y_a, Y_b par des facteurs différents, transformerait Y en une fonction dont la combinaison avec Y donnerait une nouvelle fonction Y' ne contenant plus les variables de Y_b.

Donc $Y = [\xi_1\xi_2\ldots\xi'_1\xi'_2\ldots]_r$ chacun des indices ξ, r ayant une valeur déterminée. Mais les substitutions $B_1, \ldots$ transformeront Y en fonctions analogues où les ξ prendront toutes les valeurs dont ils sont susceptibles. Enfin chacune de ces fonctions étant de la forme $a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots$, où a_1, a_2 sont des imaginaires convenablement choisies, il suffira de remplacer celles-ci par leurs conjuguées pour obtenir les variables conjuguées correspondant aux autres valeurs de r.

Enfin pour les groupes de première catégorie il existe un second

système de variables $[\xi_1 \ldots]_r$ associées aux précédentes; mais L^0 contient une substitution qui permute les deux systèmes. Donc, dans tous les cas, les transformées de y_1 par les substitutions de L^0, combinées entre elles, donneront autant de fonctions distinctes qu'il existe de variables : L^0 sera donc primaire.

30. Scolie. — *Le nombre des transformées différentes d'une fonction quelconque* Y *par les substitutions de* L^0 *est au moins égal à* $\omega\mu$.

En effet, s'il y a deux systèmes associés, on peut admettre que Y contient les variables du premier système, car s'il n'y figurait que celles du second système on considérerait au lieu de Y sa transformée par la substitution qui échange les deux systèmes.

La fonction Y (ou la partie de cette fonction formée par les variables du premier système) sera une somme de fonctions conjuguées

$$Y_0 + \ldots + Y_\nu + \ldots$$

dont la première ne contient que les variables $[\xi_1 \xi_2 \ldots]_0$ de la première série. Ses transformées auront une expression analogue.

Si nous supposons que Y_0 contienne deux variables où l'indice ξ_1 par exemple prenne des valeurs différentes, ses π transformées par les puissances de A_1 différeront les unes des autres par le rapport des coefficients correspondants à ces variables.

Si, au contraire, Y_0 ne contient que des variables où ξ_1 ait toujours la même valeur, ses π transformées par les puissances de B_1 seront encore différentes comme ne contenant pas les mêmes variables.

Le même raisonnement pouvant se faire pour chacun des indices ξ, on voit que la transformation de Y_0 par les substitutions des faisceaux h, h, ... donnera au moins μ fonctions différant les unes des autres, soit par les variables qu'elles contiennent, soit par les rapports des coefficients.

Chacune d'elles, transformée par les puissances de f, donnera ω transformées, différant les unes des autres par un facteur constant.

31. 2° L^0 *est indécomposable.* — Supposons, en effet, qu'on puisse opérer une répartition des variables en plusieurs systèmes. Parmi les fonctions qui appartiennent à quelqu'un de ces systèmes, soit Y l'une de celles qui contiennent le nombre minimum de variables. Nous allons montrer qu'elle n'en contient qu'une seule.

Supposons tout d'abord qu'elle contînt des variables de m séries, $a, b, \ldots$. On pourrait écrire

$$Y = Y_a + Y_b + \ldots,$$

$Y_a, Y_b, \ldots$ contenant respectivement les variables des séries $a, b, \ldots$.

Les transformées de Y par les puissances de f sont au nombre de ω; chacune d'elles appartiendra à un des systèmes supposés. D'ailleurs deux quelconques d'entre elles ne sauraient appartenir au même système, si elles ne sont pas égales à un facteur constant près; car par leur combinaison on pourrait obtenir une nouvelle fonction appartenant encore à ce système, mais où l'une des fonctions partielles aurait disparu. Si donc on désigne par q le nombre des puissances de f qui multiplient Y par un facteur constant, on aura $\frac{\omega}{q}$ transformées appartenant à des systèmes différents et par suite linéairement distinctes. Mais elles s'expriment toutes au moyen des m fonctions $Y_a, Y_b, \ldots$. On aura donc l'inégalité

$$\frac{\omega}{q} \leqq m \tag{1}$$

dont nous allons établir l'impossibilité.

32. 1° Supposons d'abord qu'il n'y ait pas de forme invariante. On aura $\omega = p^\nu - 1$.

D'autre part, soit δ le plus grand commun diviseur de ν, $b - a$, $c - a, \ldots$. Les nombres $a, b, \ldots$ appartenant tous à la suite

$$a, \quad a + \delta, \quad a + 2\delta, \quad \ldots,$$

on aura

$$m \leqq \frac{\nu}{\delta}.$$

Enfin, une puissance quelconque de f multiplie $Y_a, Y_b, \ldots$ par k^{l_a}, $k^{l_b}, \ldots, k$ étant une racine de la congruence

$$k^{p^\nu - 1} \equiv 1 \pmod{p^\nu}.$$

Pour qu'elle multiplie Y par un facteur constant, il faudra donc qu'on ait

$$k^{l_a} \equiv k^{l_b} \equiv \ldots \pmod{p^\nu},$$

d'où

$$k^{p^b - a} \equiv 1 \quad \ldots \quad 1 \pmod{p^\nu},$$

et, par suite,

$$k^{p^\delta - 1} \equiv 1 \pmod{p},$$

congruence qui a $p^\delta - 1$ racines. Donc $q = p^\delta - 1$.

L'inégalité (1) devient donc

$$\frac{p^\nu - 1}{p^\delta - 1} \quad \frac{\nu}{\delta} \qquad (\delta \text{ diviseur de } \nu).$$

Elle est évidemment impossible.

35. 2° Si L^0 est de première catégorie, soit d'abord $\nu' > 1$ et

$$Y = Y_a + Y_b + \ldots + Y_{a'} + Y_{b'} + \ldots$$

les séries a, b, ... appartenant au premier système, les séries a', b', ... à son associé.

Soit δ le plus grand commun diviseur de ν', $b - a$, ..., $b' - a'$, ... On aura

$$m = \frac{2\nu'}{\delta}.$$

D'autre part, une puissance de f multipliera Y_a, Y_b, ..., $Y_{a'}$, $Y_{b'}$, ... par k^{p^a}, k^{p^b}, ..., k^{-p^a}, k^{-p^b}, ... où $k^{p^{\nu'}-1} = 1$. Pour qu'elle multiplie Y par un facteur constant, il faudra donc qu'on ait,

$$k^{p^{\delta'} - 1} = 1 \pmod{p},$$

δ' étant le plus grand commun diviseur de δ et de $a + a'$, lequel est au plus égal à δ.

On aura donc l'inégalité

$$\frac{p^\nu - 1}{p^{\delta'} - 1} \leqq \frac{2\nu'}{\delta},$$

où δ' divise δ, lequel divise ν'.

D'ailleurs $p^\nu > 4$. Cette inégalité n'admettrait donc qu'une seule solution $p^\nu = 3^2$, $\delta = \delta' = 1$. Mais ce cas est exclu (n° **58**).

Reste à considérer le cas où, ν' étant égal à 1, chacun des deux systèmes associés ne contient qu'une série. On aura alors

$$Y = Y_a + Y_{a'}$$

et $m = 2$. D'autre part k devant satisfaire à la relation $k^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

sera réel. On aura, en outre, $k \equiv k^{-1}$ d'où $k \equiv \pm 1$. Donc $q = 2$ et l'inégalité devient

$$\frac{p-1}{2} > 2.$$

Elle serait satisfaite pour $p^{\nu'} = 5$.

Nous réserverons provisoirement l'examen de ce cas d'exception pour ne pas rompre la suite des raisonnements.

54. 3° Si L^0 est de deuxième catégorie, on a $2\nu'$ séries conjuguées et $m = \frac{2\nu'}{\delta}$, δ étant le plus grand commun diviseur de $2\nu'$, $b - a$, ...

D'autre part, k devra satisfaire aux deux congruences

$$k^{p^\delta - 1} \equiv 1, \qquad k^{p^{\nu'} + 1} \equiv 1 \pmod{p^\nu}.$$

Si δ ne divise pas ν', il sera égal à $2d$, d étant un diviseur de ν' tel que $\frac{\nu'}{d}$ soit impair. On aura, par suite,

$$p^\delta - 1 = (p^d - 1)(p^d + 1);$$

$p^d + 1$ divisera $p^{\nu'} + 1$, qui pourra, en outre, avoir (si p est impair) un facteur commun 2 avec $p^d - 1$. On aura donc $q = 2(p^d + 1)$ et, par suite,

$$\frac{p^{\nu'} + 1}{2(p^d + 1)} = \frac{2\nu'}{d}.$$

Cette inégalité ne peut avoir lieu $\left(\frac{\nu'}{d}\right.$ étant impair$\left.\right)$ que si $p^{\nu'} = 2^3$ et $d = 1$. Mais ce cas est exclu (n° **39**).

Si δ divise ν', on aura

$$k^{p^{\nu'} - 1} \equiv 1$$

et comme $p^{\nu'} - 1$ et $p^{\nu'} + 1$ ne peuvent avoir d'autre diviseur commun que 2, on aura

$$\frac{p^{\nu'} - 1}{2} \geq \frac{2\nu'}{\delta}.$$

Cette inégalité n'est possible que si $p^{\nu'} = 3$, $\delta = 1$. Nous réserverons encore l'examen de ce cas.

55. Il est donc établi (sauf les deux cas réservés) que l'un des sys-

tèmes dont on a supposé l'existence contient une fonction Y_a où ne figurent que les variables d'une seule série.

Ses transformées par les $\omega\mu^2$ substitutions du noyau de L^0 appartiendront chacune à un système. Or elles s'expriment au moyen de μ fonctions linéairement distinctes. Le nombre des systèmes $s_1, s_2, \ldots,$ auxquels elles appartiennent ne peut donc dépasser μ.

La substitution f, multipliant chacune des fonctions précédentes par un facteur constant, ne déplacera aucun de ces systèmes.

Les μ^2 substitutions

$$A_1^{\alpha_1} B_1^{\beta_1} \ldots A_\sigma^{\alpha_\sigma} B_\sigma^{\beta_\sigma} A_1^{\alpha'_1} B_1^{\beta'_1} \ldots$$

permuteront transitivement les systèmes s précédents. Donc, l'une d'entre elles U laissera immobile un système donné s_1.

Elle ne déplacera aucun de ces systèmes $s_1, s_2, \ldots$. Soit, en effet, S une substitution du noyau qui fasse succéder s_k à s_1. La substitution $S^{-1}US$ ne déplacera pas s_k; mais elle est de la forme Uf^ρ et f ne déplace pas s_k; dont U le laisse également immobile.

Celles des substitutions de L^0 qui ne déplacent pas les séries permutent également les systèmes s entre eux. Si T est l'une d'elles, la transformée $T^{-1}UT$ ne les déplacera pas.

Or, si nous supposons pour fixer les idées, que dans la substitution U l'un au moins des exposants $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_\sigma, \beta_\sigma$ ne soit pas nul, les transformées $T^{-1}UT$ combinées entre elles reproduisent tout le second faisceau

$$h = \begin{pmatrix} A_1, & \ldots, & A_\sigma \\ B_1, & \ldots, & B_\sigma \end{pmatrix}.$$

Or les transformées de Y_a par les substitutions de ce faisceau dépendent linéairement de π^σ fonctions distinctes, qui toutes feront partie du même système. Le nombre des systèmes $s_1, \ldots,$ ne pourra donc surpasser $\mu\pi^{-\sigma}$, nombre inférieur à celui $\mu^2\pi^{-2\sigma}$ des substitutions de la forme $A_1^{\alpha'_1} B_1^{\beta'} \ldots$. Par un raisonnement pareil au précédent, on verra qu'il existe un second faisceau h' dont les substitutions laissent immobiles tous les systèmes $s_1, \ldots,$ et que le nombre de ceux-ci ne pourra pas dépasser $\mu\pi^{-\sigma}\pi^{-\sigma'}$. Continuant ainsi, on arrive finalement à cette conclusion que toutes les fonctions des variables de la série a appartiennent à un seul système.

Chacune de ces fonctions Y_a, exprimée au moyen des variables

réelles $x_1, \ldots, x_n$, sera de la forme

$$a_1 x_1 + \ldots + a_k x_k$$

où les a sont des quantités complexes. En les remplaçant par leurs conjuguées, on obtiendra les fonctions $Y_1, \ldots,$ conjuguées de Y_a qui seront également linéaires en $x_1, \ldots, x_k$ et, par suite, appartiendront au même système.

Donc, sauf pour les groupes de première catégorie, aucune décomposition en plusieurs systèmes n'est possible, puisqu'ils se réduiraient à un seul contenant toutes les variables.

Pour les groupes de première catégorie, on a une décomposition toute trouvée en deux systèmes associés; mais elle ne satisfait pas à la seconde condition, imposée par la définition des groupes indécomposables à forme invariante Φ (**17**). Car ici la forme Φ, bilinéaire par rapport aux variables des deux systèmes, ne peut évidemment pas se décomposer en deux formes partielles $\Phi_1 + \Phi_2$ où ces variables figurent séparées.

56. Passons à l'examen des deux cas réservés.

Groupes de première catégorie où $p^\gamma = 5$. — Dans un semblable groupe L, on a deux séries associées, contenant respectivement des variables x et des variables x'; L contient la substitution impropre

$$h = |x, x' \quad x, gx'| \qquad (g = 3).$$

L^0 a pour noyau

$$f = |x, x' \quad gx, g^{-1}x'|, \qquad h = \begin{pmatrix} A_1, & \ldots, & A_\sigma \\ B_1, & \ldots, & B_\sigma \end{pmatrix}, \; h', \; \ldots$$

Les nombres $\pi, \pi', \ldots$ divisant 4, seront égaux à 2; donc

$$\theta = \theta' = \ldots = -1.$$

S'il y avait une décomposition possible en systèmes, leurs fonctions seraient de la forme

$$X + X',$$

X et X' contenant respectivement les variables des deux séries. Si l'une de ces fonctions se réduisait à la forme X, on pourrait achever la démonstration comme dans le cas général.

Or, si la forme invariante Φ est quadratique, L ne pouvant être

employé comme groupe auxiliaire, il suffit de prouver qu'il n'est pas décomposable. On peut donc considérer les transformées de $X + X'$ par les puissances de k. Ces fonctions $X + g^\rho X'$ au nombre de 4 ne dépendent que des deux variables X et X'; donc deux d'entre elles appartiendront au même système, qui contiendra également une fonction des variables d'une seule série, résultant de leur combinaison.

Si Φ est bilinéaire, il faudra démontrer que L^0 est indécomposable. Cela sera établi si nous arrivons à prouver qu'une puissance impaire de f, telle que f^ρ, laisse quelque système immobile; car il contiendra les deux fonctions distinctes $X + X'$ et $g^\rho X + g^{-\rho} X'$ et, par suite, X et X'.

Or, l'hypothèse contraire va nous amener à une contradiction.

57. Tout d'abord, le nombre des systèmes ne peut surpasser celui 2μ des variables. Or, il existe $2\mu^2$ substitutions de la forme

$$f^\rho A^{\alpha_1} B^{\beta_1} \ldots A_1'^{\alpha_1'} B_1'^{\beta_1'} \ldots,$$

où $\rho = 0$ ou 1.

Donc, parmi ces substitutions, il en existera une U qui ne soit pas puissance de f et qui laisse immobile un système donné s_1.

Soit S une autre substitution du noyau qui remplace s_1 par un autre système s_k; $S^{-1}US$ ne déplace pas s_k; mais cette substitution est égale à U ou à θU, θ multipliant toutes les variables par -1 et, par suite, laissant s_k immobile.

On pourra en conclure, comme au n° **55**, que les μ fonctions que les substitutions de h, h', ..., font succéder à $X + X'$ appartiennent à un même système. Donc on n'aurait que deux systèmes, que f échangerait entre eux.

58. Cela posé, L^0 contient la substitution

$$R' = R(A_1 B_1)^\alpha (A_1' B_1')^{\alpha'} \ldots$$

dont les transformées par les substitutions de l'espèce T qui laissent Φ invariable et sont permutables à h seront de la forme $R' f^\rho$.

Le groupe K formé par ces substitutions T est isomorphe à un groupe $\mathfrak{X}$ de substitutions linéaires laissant invariante la forme ψ quadratique à 2σ variables mod 2 qui correspond au faisceau h. Il contient un seul sous-groupe invariant K' d'indice 2 formé par celles de ses substitutions dont les corrélatives dans $\mathfrak{X}$ sont paires.

Il contient d'ailleurs la substitution

$$T = \left| \begin{matrix} [\xi_1 \ldots] & \theta^{\xi_1}[\xi_1 \ldots] + [\xi_1 + 1, \ldots] \\ [\xi_1 \ldots]' & g^{\xi_1}\theta^{\xi_1}[\xi_1 \ldots]' + [\xi_1 + 1, \ldots]' \end{matrix} \right| \text{(1)}$$

laquelle transforme A_1, B_1, R' en B_1, A_1, $R'f^{1+2u}$.

Celles des substitutions de K qui transforment R' en $R'f^{\rho}$ (ρ pair) forment évidemment dans K un sous-groupe invariant d'indice 2, qui se confondra nécessairement avec K'. Au contraire, toutes celles de ces substitutions qui correspondent aux substitutions impaires de K transformeront R' en $R'f^{\rho}$ (ρ impair).

Or, L^0 contiendra nécessairement une de ces substitutions ; car pour éviter de tomber dans un cas exclu (**43**), il faut supposer

$$\tau + \Sigma u \equiv 0 \qquad (\text{mod } 2).$$

D'ailleurs, Φ étant bilinéaire, on a $\tau = 1$. Donc l'un au moins des nombres u, u', ... sera égal à 1 (nous pouvons supposer que c'est u). Donc la forme ψ sera du second type; et le groupe auxiliaire Λ contenu dans $\mathfrak{X}$ qui sert à la construction de L^0 contiendra une substitution impaire (**34**).

Cela posé, si la substitution R' laisse les systèmes immobiles (ou les échange), sa transformée $R'f^{\rho}$ les laissera aussi immobiles (ou les échangera). Donc une substitution f^{ρ} où ρ est impair ne les déplace pas, contrairement à ce qui était supposé.

39. *Groupes de deuxième catégorie où $p^{\nu} = 3$.* — Le groupe L contient toutes les substitutions qu'il aurait en l'absence de forme invariante. Il est donc indécomposable.

Mais si la forme Φ est bilinéaire, il faut encore établir que L^0 est indécomposable. La démonstration est identique à la précédente. Après avoir montré qu'il ne peut y avoir plus de deux systèmes, on remplacera dans le raisonnement la substitution R' par celle-ci :

$$P' = P(A_1B_1)^{a}(A_1'B_1')^{a'} \ldots$$

et T par la substitution

$$T_1 = \left| \begin{matrix} [\xi_1 \ldots]_0 & i^{\xi_1}\theta^{\xi_1}[\xi_1 \ldots]_0 + [\xi_1 + 1, \ldots]_0 \\ [\xi_1 \ldots]_1 & i^{\xi_1}\theta^{\xi_1}[\xi_1 \ldots]_1 + [\xi_1 + 1, \ldots]_1 \end{matrix} \right|$$

laquelle transforme encore A_1, B_1, P en B_1, A_1, $P'f^{1+2u}$.

(1) Les indices non inaltérés ne sont pas écrits.

IV. — Cas où ni L^0, ni $\overline{L^0}$ ne sont indécomposables.

60. Il est évident qu'un groupe $\overline{L^0}$ décomposable ne peut contenir un groupe L^0 indécomposable, si celui-ci l'est réellement, ainsi qu'il a été démontré dans la section précédente.

Nous établirons dans celle-ci :

1° Que *si* L^0 *est décomposable et contenu dans* $\overline{L^0}$, *il lui sera identique* :

2° Que *si* L^0 *est complexe*, $\overline{L^0}$ *ne peut le contenir*.

61. Lemme. — *Le nombre* N *des transformées différentes d'une fonction linéaire quelconque* φ *par les substitutions d'un groupe primaire* L^0 *à* n *variables* mod p *ne peut être inférieur à* $n+1$. *Il surpassera même ce nombre, sauf pour quelques groupes exceptionnels que nous allons déterminer :*

1° Si L^0 est indécomposable, on aura $N \geqq \omega\mu$ (**50**). Or, s'il n'y a pas de forme invariante, on aura

$$\omega\mu = (p^\nu - 1)\mu, \qquad n+1 = \mu\nu + 1 \qquad (p^\nu > 2);$$

Si L^0 est de première catégorie,

$$\omega\mu = (p^{\nu'} - 1)\mu, \qquad n+1 = 2\mu\nu' + 1 \qquad (p^{\nu'} > 4);$$

S'il est de deuxième catégorie,

$$\omega\mu = (p^{\nu'} + 1)\mu, \qquad n+1 = 2\mu\nu' + 1;$$

S'il est de troisième catégorie,

$$\omega\mu = 2\mu, \qquad n+1 = \mu + 1 \qquad (p \text{ impair}).$$

La comparaison de ces valeurs montre l'exactitude de notre proposition, les groupes exceptionnels étant les suivants :

Groupes sans forme invariante,

$$p^\nu = 3, \qquad \mu = 1, \qquad n = 3;$$

Groupes de première catégorie,

$$p^{\nu'} = 3^3, \qquad \mu = 1, \qquad n = 6;$$

Groupes de deuxième catégorie,

$$p^{\nu} = 2, \qquad \mu = 1, \qquad n = 2;$$
$$p^{\nu} = 2^2, \qquad \mu = 1, \qquad n = 4;$$

Groupes de troisième catégorie,

$$p \text{ impair}, \qquad \mu = 1, \qquad n = 1.$$

2° Si L^0 est décomposable, on aura m systèmes $s_1, \ldots, s_m$ contenant chacun n' variables, avec $n = mn'$. Et L^0 s'obtiendra par la combinaison de m groupes indécomposables $L_1^0, \ldots, L_m^0$, opérant respectivement sur les n' variables des divers systèmes, avec un groupe transitif G de déplacements d'ensemble.

Soit

$$\varphi = \varphi_1 + \ldots + \varphi_k,$$

où $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ contiennent respectivement les variables des systèmes $s_1, \ldots, s_k$. Si $k < m$, G contiendra une substitution qui remplace s_1 par s_{k+1}. Elle transforme φ en une fonction

$$\varphi' = \varphi_{k+1} + \ldots$$

contenant les variables de k systèmes, dont quelques-uns pourront être les mêmes qui figurent dans φ. Désignons les autres par

$$\varphi_{k+1}, \quad \varphi_{k+2}, \quad \ldots.$$

Si $m > 2k$, on obtiendra de même une transformée

$$\varphi'' = \varphi_{2k+1} + \ldots.$$

Continuant ainsi, on obtiendra une suite de transformées $\varphi, \varphi', \ldots$ dans chacune desquelles figure un système que ne contenaient pas les précédentes. Leur nombre est au moins égal à $\frac{m}{k}$. Il sera un entier supérieur à ce nombre, s'il est fractionnaire.

Chacune de ces fonctions $\varphi, \varphi', \ldots$ transformée par les substitutions de $L_1, \ldots, L_m$ donnera au moins $(n'+1)^k$ transformées différentes. On aura donc

$$N \geqq \frac{m}{k}(n'+1)^k,$$

nombre évidemment supérieur à $n + 1 = mn' + 1$. Le lemme est donc démontré, et les seuls groupes exceptionnels sont ceux déjà signalés.

62. Théorème. — *Le groupe* L^0 *étant supposé décomposable, ses variables pourront admettre divers groupements en systèmes. Mais ceux indiqués au n°* **20** *seront les seuls possibles.*

Soit, en effet, $s_1, \ldots, s_m$ celle de ces décompositions où le nombre n' des variables de chaque système est maximum; L^0 résultera de la combinaison de groupes semblables $L_1^0, \ldots, L_m^0$ avec un groupe G de déplacements d'ensemble, lequel sera primitif.

Soit $\overline{s}_1, \overline{s}_2, \ldots$ une autre décomposition en systèmes. Chacune des fonctions φ qui appartiennent à l'un de ces nouveaux systèmes $\overline{s}$ sera de la forme

$$\varphi = X_1 + \ldots + X_m = X_1 + Y,$$

X_k étant une fonction linéaire des variables de s_k.

Supposons que les groupes $L_1^0, \ldots$ ne soient pas exceptionnels (ce qui arrivera nécessairement s'ils sont décomposables). Transformons φ par les substitutions de L_1^0. Chacune de ces transformées

$$X_1 + Y, \quad X_1' + Y, \quad \ldots$$

appartiendra à l'un des nouveaux systèmes $\overline{s}$; elles ne dépendent que des m variables de L_1^0 et de la fonction complémentaire Y; mais leur nombre est supérieur à $m + 1$; elles ne peuvent donc être linéairement distinctes et deux d'entre elles appartiendront à un même système $\overline{s}_1$ qui contiendra également leur différence, laquelle est de la forme X_1.

Les transformées de cette fonction particulière X_1 par les substitutions de L_1^0 appartiendront toutes à l'un des systèmes $\overline{s}$. Soient $\overline{s}_1, \ldots, \overline{s}_k$ ceux de ces systèmes dont quelque fonction dépend ainsi des seules variables de L_1^0. Aucun de ces systèmes ne pourra contenir de fonction dans l'expression de laquelle figurent des variables autres que celles de L_1^0.

Supposons, en effet, que $\overline{s}_1$, qui contient la fonction X_1, contînt une autre fonction $X_2 + Z$ où figurent les variables de L_2^0. Les substitutions de L_2^0 n'altérant pas X_1, ne déplaceront pas le système $\overline{s}_1$. Il contiendra donc les transformées

$$X_2 + Z, \quad X_2' + Z, \quad \ldots$$

et leurs différences $X_2' - X_2, \ldots$ dont la combinaison reproduit toutes les variables du groupe primaire L_2^0. Les substitutions de L_1^0 laissant ces fonctions invariables ne déplaceraient pas le système $\overline{s}_1$ qui contien-

drait les transformées X_1, X'_1, ... de X_1, et, par suite, toutes les variables de L_1^0. Donc, $\overline{s_1}$ contiendrait plus de variables que s_1, contrairement à l'hypothèse.

Chacun des anciens systèmes $s_1, \ldots, s_m$ se confond donc, si $k = 1$, avec un des systèmes nouveaux $\overline{s_1}, \ldots$; si $k > 1$, il est formé de la réunion de k d'entre eux, $\overline{s_1}, \ldots, \overline{s_k}$. Dans ce dernier cas, L_1^0 est décomposable, et on pourra lui appliquer les mêmes raisonnements qu'à L^0.

63. Ces raisonnements ne seraient pas applicables, si les groupes $L_1^0, \ldots, L_m^0$ étaient exceptionnels. Il pourrait, en effet, arriver qu'aucun des systèmes $\overline{s}$ ne contînt de fonction telle que X_1, où ne figurent que les variables de s_1. Soit dans ce cas

$$\Phi = X_1 + X_2 + Y$$

une fonction de l'un des systèmes $\overline{s}$. Si n' est le nombre des variables de chaque système s, les transformées de Φ par les substitutions de L_1^0 et de L_2^0 appartiendront chacune à un système $\overline{s}$. Elles dépendent de $2n' + 1$ variables et leur nombre est au moins égal à $(n' + 1)^2$. Elles ne peuvent donc être toutes distinctes; donc deux d'entre elles sont nécessairement contenues dans un même système $\overline{s_1}$. Il contiendra leur différence, qui est de la forme $X_1 + X_2$. Les transformées de cette fonction par les substitutions de (L_1^0, L_2^0) appartiendront chacune à un système $\overline{s}$. Leur combinaison reproduit toutes les variables de L_1^0 et de L_2^0.

Soient $\overline{s_1}, \ldots, \overline{s_k}$ les systèmes ainsi obtenus. On voit comme précédemment qu'aucune de leurs fonctions ne peut contenir dans son expression des variables autres que celles de L_1^0, L_2^0. L'ensemble des deux systèmes s_1, s_2 est donc formé par la réunion des k systèmes $\overline{s_1}, \ldots, \overline{s_k}$ dont les fonctions sont de la forme $X_1 + X_2$, aucune d'elles ne se réduisant d'ailleurs à X_1 ni à X_2.

Nous allons montrer que cela est impossible.

64. Soit en effet n' le nombre des variables de L_1^0; le groupe (L_1^0, L_2^0) en contient $2n'$ qui doivent se répartir également entre les systèmes $\overline{s_1}, \ldots, \overline{s_k}$; donc k divise $2n'$. Mais d'autre part les substitutions de L_1^0 donnent de la fonction $X_1 + X_2$ au moins $n' + 1$ transformées

différentes, qui ne peuvent appartenir à un même système $\bar{s}$, car il contiendrait leur différence, qui est de la forme X_1. Donc $k \geqq n' + 1$. Ces deux résultats ne peuvent se concilier que si $n' = 1$. Or nous n'avons que deux groupes exceptionnels satisfaisant à cette condition, à savoir, s'il n'y a pas de forme invariante, $p^\nu = 3$, $n = 1$, ou si L_1^0 est de troisième catégorie, $\mu = n = 1$, p quelconque. Dans les deux cas, le groupe (L_1^0, L_2^0) est formé des substitutions

$$(x, y, \quad \pm x, \quad \pm y)$$

et l'on a deux systèmes $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$ dont l'un contient la fonction

$$X_1 + X_2 = ax + by$$

et l'autre la fonction

$$ax - by.$$

Il faut ici supposer $m > 2$ pour ne pas tomber dans un cas exclu (**35**) et (**36**). Mais alors les groupes $L_3^0, \ldots$ seront formés de substitutions des formes

$$|z \pm z|, \quad |u \pm u|, \quad \ldots,$$

Et le groupe G, étant primitif, contiendra une substitution S qui, laissant x immobile, remplace y par une autre variable z. La substitution S transformerait $ax + by$ et $ax - by$ en deux nouvelles fonctions $ax + bz$, $ax - bz$ appartenant à des systèmes $\bar{s}_3$, $\bar{s}_4$ différents des précédents. On aurait ainsi quatre fonctions linéairement distinctes des trois variables x, y, z.

Il est donc établi que les systèmes $\bar{s}$ représentent l'un des groupements en systèmes indiqués au n° **20**. Par suite L^0 résultera de la combinaison d'un groupe primaire $\mathcal{L}^0$ opéré entre les variables de $\bar{s}_1$ et d'un groupe $\mathcal{G}$ de déplacements d'ensemble entre les systèmes $\bar{s}$.

65. Cela posé, supposons que L^0 soit contenu dans un autre groupe $\overline{L}^0$ admettant une décomposition des variables en systèmes $\bar{s}_1, \ldots$ et résultant de la combinaison des deux groupes $\overline{G}$ et $\overline{L}_1^0$. L^0 admettant cette même décomposition résultera, comme on vient de le voir, de la combinaison des deux groupes analogues $\mathcal{G}$ et $\mathcal{L}^0$ qui devront être respectivement contenus dans $\overline{G}$ et $\overline{L}_1^0$. Mais dans ces derniers groupes le nombre des variables étant moindre que dans $\overline{L}^0$

on doit supposer le théorème démontré. Donc $\mathcal{G}$, $\mathcal{L}^0$, L^0 sont identiques à $\overline{G}$, $\overline{L_1^0}$, $\overline{L^0}$.

66. Soient maintenant $\overline{L^0}$ un groupe décomposable : $\overline{s_1}, \ldots, \overline{s_m}$ les systèmes minima entre lesquels ses variables puissent être réparties ; $\overline{G}$, $\overline{L_1^0}, \ldots, \overline{L_m^0}$ les groupes dont la combinaison produit $\overline{L^0}$.

Supposons que $\overline{L^0}$ contienne un groupe complexe L^0 résultant de la combinaison de groupes primaires partiels L_a^0, L_b^0, ... dépendant chacun d'une partie des variables.

Si le groupe L_a^0 n'est pas exceptionnel, on verra, comme au n° **64**, qu'il a pour variables celles d'un certain nombre des systèmes $\overline{s}$, tels que $\overline{s_1}, \ldots, \overline{s_k}$ et s'obtient en combinant des groupes $\mathcal{L}_1^0, \ldots, \mathcal{L}_k^0$ avec un groupe $\mathcal{G}_a$ de déplacement d'ensemble.

Les groupes $\mathcal{L}_1^0, \ldots, \mathcal{L}_k^0$ étant contenus dans les groupes $L_1^0, \ldots, L_k^0$ de moins de n variables, leur seront identiques.

Si donc aucun des groupes L_a^0, L_b^0, ... n'est exceptionnel, L^0 résultera de la combinaison des groupes $L_1^0, \ldots, L_m^0$ avec un groupe $(\mathcal{G}_a, \mathcal{G}_b, \ldots)$ de déplacements d'ensemble des systèmes $\overline{s}$. Ce groupe intransitif devrait être contenu dans le groupe transitif $\overline{G}$, opéré sur m objets seulement; cela est impossible.

67. La présence de groupes exceptionnels dans la suite L_a^0, L_b^0, ... n'infirme pas ce résultat. Supposons en effet que L_a^0 n'étant pas exceptionnel, les groupes suivants L_b^0, L_c^0, ... le soient. Les variables de L_a^0 étant celles des systèmes $\overline{s_1}, \ldots, \overline{s_k}$, celles des systèmes suivants $\overline{s_{k+1}}, \ldots$ seront de la forme

$$\varphi = X_a + X_b + X_c + \ldots.$$

Si l'on peut établir que l'une d'elles se réduit à la forme X_b, on en conclura comme tout à l'heure que L_b^0 a pour variables celles de quelques-uns des systèmes $\overline{s}$.

Or supposons d'abord que φ se réduise à $X_a + X_b$. Si n_b est le nombre des variables de L_b^0, les $n_b + 1$ transformées $\varphi_1, \varphi'_1, \ldots$ de φ par les substitutions L_b^0 appartiendraient à des systèmes $\overline{s_{k+1}}, \ldots$ tous différents de $\overline{s_1}, \ldots, \overline{s_k}$. Elles ne peuvent être linéairement distinctes, car en les combinant de manière à éliminer les variables de L_b^0, on arriverait à ce résultat inadmissible que X_a serait à la fois fonction des

variables de $\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_k$, et fonction de celles de $s_{k+1}, \ldots$. Donc deux des fonctions $\varphi_1, \varphi'_1, \ldots$ appartiendront au même système. Il contiendra leur différence qui est de la forme X_b.

Supposons au contraire que φ contienne à la fois X_b et X_c. On verra comme au n° **65** : 1° qu'il existe des fonctions de la forme $X_b + X_c$ appartenant à un système $\bar{s}$; 2° que les $n_b + n_c$ variables des groupes L_b^0, L_c^0 résultent de la combinaison de telles fonctions. Le nombre des systèmes entre lesquels ces fonctions se répartissent doit être un diviseur de $n_b + n_c$. Mais comme on suppose d'autre part qu'aucune de ces fonctions ne se réduit à X_b ou à X_c, ce nombre sera au moins égal à $n_b + 1$ et à $n_c + 1$. Ces relations ne sont compatibles que si $n_b = n_c = 1$. Mais alors les groupes L_b^0, L_c^0 seraient semblables, et ce cas est exclu (**21**).

V. — Maximum du nombre des fonctions linéaires distinctes inaltérées par une substitution d'un groupe L indécomposable.

68. Théorème. — *Un groupe* L *résoluble et indécomposable à* n *variables ne peut contenir aucune substitution (l'unité exceptée) qui laisse invariables* N *fonctions linéaires distinctes, si* $N > \frac{3}{4}n$.

Soit en effet S une substitution de L dans laquelle N soit $> \frac{n}{2}$; et soit U une autre substitution de L. Le système des N fonctions que S n'altère pas et celui des N fonctions que la transformée $U^{-1}SU$ n'altère pas ont au moins $2N - n$ fonctions communes que $S^{-1}U^{-1}SU$ n'altérera pas.

Si l'on prend en particulier $U = f$, $S^{-1}f^{-1}Sf$ étant une puissance de f qui laisse des fonctions inaltérées, se réduira à l'unité. Donc S est échangeable à f.

Elle ne peut l'être à toutes les substitutions des seconds faisceaux h, h', car elle se réduirait alors à l'unité. Supposons donc que h, d'ordre $\pi^{2\sigma+1}$, contienne une substitution U non échangeable à S. La substitution $S^{-1}U^{-1}SU$ laisse inaltérées au moins $2N - n$ fonctions. Mais elle appartient à h, dont chaque substitution laisse inaltérées $\frac{n}{\pi}$ fonctions (ou les altère toutes). Donc

$$2N - n \quad \frac{n}{\pi},$$

d'où

$$N \leqq \frac{n}{2}\left(1 + \frac{1}{\pi}\right) \leqq \frac{3n}{4},$$

car $\pi \leqq 2$.

69. On peut préciser davantage, si l'ordre ϖ de S est impair. Il est permis de le supposer premier.

Lemme. — *h contient un sous-groupe abélien permutable à S et d'ordre $\pi^{\sigma+1}$.*

En effet, il contient la substitution $f^{\frac{\varpi}{\pi}} = 0$ qui est échangeable à S. Le groupe h_0 formé par ses puissances va être progressivement élargi par l'adjonction de nouvelles substitutions de h, sans cesser d'être abélien et permutable à S.

Supposons, en effet, que nous ayons déjà obtenu un groupe h_s jouissant de ces propriétés et d'ordre π^{s+1}, s étant $< \sigma$; h contiendra des substitutions échangeables à celles de h_s, sans être contenues dans h_s. Prenons l'une d'elles pour U.

Si $U^{-1}S^{-1}USU = U'$ appartient à h_s, S sera permutable au groupe élargi $(h_s, U) = h_{s+1}$.

Dans le cas contraire, U' sera une substitution de h échangeable à celles de h_s et laissant invariables quelques-unes des fonctions que S n'altère pas. Il en sera de même des transformées successives

$$S^{-1}U'S = U'_1, \qquad S^{-1}U'_1S = U_2, \qquad \ldots$$

Ces substitutions seront d'ailleurs échangeables entre elles, car $U_1'^{-1}U'^{-1}U'_1U'$, par exemple, est une puissance de 0, mais qui laisse des fonctions invariables. Elle se réduit donc à l'unité.

Le groupe élargi $(h_s, U', U'_1, \ldots)$ est donc abélien. D'ailleurs S lui sera permutable, puisqu'elle l'est à h_s et qu'elle permute circulairement U', U'_1, ...

70. Le groupe abélien h_σ dont l'existence vient d'être établie s'obtient par la combinaison de $\sigma + 1$ substitutions génératrices

$$0, \quad C_1, \quad \ldots, \quad C_\sigma.$$

Ces substitutions C sont d'ordre π si π est impair; si $\pi = 2$ elles auront pour ordre 2 ou 4, suivant leur caractère.

D'ailleurs, si C_i et C_k ont pour caractère 1, on pourra prendre pour

génératrice, au lieu de C_k, celle-ci : $C_i C_k$, qui a pour caractère zéro. On peut donc admettre que $C_2, \ldots, C_\sigma$ aient pour caractère zéro, l'incertitude ne subsistant que pour C_1.

On pourra déterminer dans h des substitutions $D_1, \ldots D_\sigma$ telles que les exposants d'échange $C_i D_k$ soient tous nuls, sauf ceux où $i = k$, qui seront égaux à 1. En outre, si $\pi = 2$, auquel cas on doit tenir compte des caractères, on peut faire en sorte que D_i ait pour caractère zéro, si $i > 1$; car si elle avait le caractère 1, on pourrait lui substituer $C_i D_i$, dont le caractère est zéro.

Quant à D_1, on peut lui supposer le même caractère qu'à C_1 ; car si C_1 avait pour caractère zéro, on remplacerait au besoin D_1 par $C_1 D_1$. Supposons au contraire que le caractère de C_1 soit 1 et que celui de D_1 soit zéro. Les substitutions de h_σ seront de deux sortes; les unes d'ordre 2 dérivées de $C_2, \ldots, C_\sigma, \theta$, que nous désignerons d'une manière générique par E; les autres de la forme $C_1 E$, d'ordre 4.

La substitution S étant permutable au groupe des E transformera D_1, qui leur est échangeable, en une substitution qui le soit aussi, mais ne le soit pas à C_1. La transformée aura donc pour expression $D_1 C_1^\rho E$, où $\rho = 0$ ou 1. La transformée de D_1 par S^ϖ aura la forme $D_1 C_1^{\rho\varpi} E$; mais elle doit se réduire à D_1 puisque $S^\varpi = 1$. On aura donc nécessairement $\rho = 0$. Donc S est permutable au groupe $\theta, D_1, C_2, \ldots C_\sigma$ où la génératrice D_1, qui a pour caractère zéro, a pris la place de C_1.

71. Les substitutions C, D jouissent donc de toutes les propriétés attribuées aux substitutions fondamentales A, B (n° **28**). On pourra donc supposer qu'elles se confondent avec elles et choisir des variables indépendantes $[\xi_1, \ldots, \xi_\sigma \varepsilon']_r$ qui ramènent leur expression à la forme normale (n° **29**). Nous serons alors en mesure de déterminer la forme générale que doit avoir la substitution S.

Soit

$$A_1^{\alpha_{1k}} \ldots A_\sigma^{\alpha_{\sigma k}} \theta^{\alpha_k} \qquad (k = 1, \ldots, \sigma)$$

celle des substitutions de h_σ qu'elle doit transformer en A_k. Posant

$$\eta_k = a_{1k}\xi_1 + \ldots + a_{\sigma k}\xi_k + \alpha_k,$$

on vérifie immédiatement que la substitution S_0 qui remplace chaque variable

$$[\xi_1, \ldots, \xi_\sigma, \varepsilon']_r \quad \text{par la variable} \quad [\eta_1, \ldots, \eta_\sigma, \varepsilon']_r$$

opère la transformation demandée et qu'elle est d'ailleurs permutable au groupe $(\theta, B_1, \ldots, B_\sigma)$.

On aura donc

$$S = S_0 U,$$

U étant échangeable à toutes les substitutions du groupe h_σ.

Si L a un autre second faisceau h', l'indice ε' étant remplacé par σ' indices $\xi'_1, \ldots, \xi'_{\sigma'}$, on verra de même que U est le produit de deux substitutions dont la première S'_0 fera succéder à chaque variable une autre variable, où les indices $\xi'_1, \ldots, \xi'_{\sigma'}$ sont remplacés par $\eta'_1, \ldots, \eta'_{\sigma'}$, fonctions linéaires de $\xi'_1, \ldots, \xi'_\sigma$; la seconde substitution U' étant échangeable à $(\theta', A'_1, \ldots, A'_{\sigma'})$.

72. Supposons, pour abréger, que h' soit le dernier des seconds faisceaux. La substitution U' multipliera chaque variable par un facteur constant.

Les variables seront donc de deux sortes :

1° La première comprendra celles dont les indices satisfont aux relations

$$(1) \qquad \xi_1 \equiv \eta_1, \quad \ldots, \quad \xi_\sigma \equiv \eta_\sigma \quad (\operatorname{mod} \pi),$$

$$(2) \qquad \xi'_1 \equiv \eta'_1, \quad \ldots, \quad \xi'_{\sigma'} \equiv \eta_{\sigma'} \quad (\operatorname{mod} \pi').$$

S les reproduira à un facteur près.

Si l'on suppose que les relations (1) se réduisent à q distinctes et les relations (2) à q' distinctes, le nombre m des variables de cette sorte sera évidemment

$$m = \frac{n}{\pi^q \pi'^{q'}}.$$

2° Soit x_1 l'une des $n - m$ variables de la seconde sorte. S la remplacera par $a_1 x_2$, a_1 étant un facteur constant et x_2 une autre variable. Elle remplacera de même $a_1 x_2$ par $a_2 x_3$, etc.; et S étant d'ordre ϖ, la suite $x_1, a_1 x_2, a_2 x_3$ doit se reproduire périodiquement après ϖ termes.

Or, pour que S laisse inaltérée une fonction

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\varpi x_\varpi,$$

il faut qu'on ait

$$a_1\lambda_1 = \lambda_2, \qquad a_2\lambda_2 = \lambda_3, \qquad \ldots, \qquad a_{\varpi-1}\lambda_{\varpi} = \lambda_1,$$

d'où

$$a_1 a_2 \ldots a_{\varpi-1} = 1$$

et si cette condition est remplie, on n'aura qu'une fonction invariante, les rapports des λ étant déterminés.

Donc on aura dans l'hypothèse la plus favorable où les m variables de la première sorte seraient toutes inaltérées, la limite supérieure

$$N \leqq \frac{n-m}{\varpi} + m = n\left[\frac{1}{\varpi} + \frac{1}{\pi^q \pi'^{q'}} - \frac{1}{\varpi\pi^q\pi'^{q'}}\right]$$

et comme $\varpi \geqq 3$, $\pi \geqq 2$, $\pi' \geqq 2$, on aura, si $q + q' > 1$,

$$N \leqq \frac{n}{2},$$

l'égalité n'ayant lieu que si $\varpi = 3$.

Soit au contraire $q = 1$, $q' = 0$. Les relations (2) seront identiques; quant aux relations (1), la substitution linéaire qu'elles opèrent sur les indices pourra, par une transformation linéaire réelle, être mise sous la forme

$$(3) \qquad |\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\sigma, \quad a\xi_1 + b\xi_2 + \ldots + \alpha, \xi_2, \ldots, \xi_\sigma, \quad (\text{mod}\,\pi);$$

et, pour que S soit d'ordre ϖ, il faudra qu'on ait $a^\varpi = 1$ (mod π). Mais on a aussi $a^{\pi-1} \equiv 1$ (mod. π). Donc si $a > 1$, ϖ devra diviser $\pi - 1$, et

$$N = n\left[\frac{1}{\varpi} + \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\varpi\pi}\right] < \frac{n}{2}.$$

Si $a = 1$, la substitution (3) étant d'ordre π, on aura $\varpi = \pi$

$$N = n\left[\frac{2}{\varpi} - \frac{1}{\varpi^2}\right],$$

expression encore moindre que $\frac{n}{2}$, sauf pour $\varpi = 3$ où elle est égale à $\frac{5}{9}n$.

75. Supposons enfin que les relations (1) et (2) soient identiques : S sera échangeable à toutes les substitutions $A_1, \ldots, A_\sigma, A_1, \ldots, A_\sigma$. Elle devra donc transformer les substitutions B_i en substitutions de la

forme

$$B'_i = B_i A_1^{\alpha_{i1}} \ldots A_\sigma^{\alpha_{i\sigma}} \theta^{\chi_i} \qquad (i = 1, \ldots, \sigma),$$

avec la condition que B'_i et B_k soient échangeables. D'ailleurs, si elle n'est pas échangeable à tous les B_i, on aura nécessairement $\pi = \varpi$. Autrement S^ϖ transformant B_i en

$$B_i (A_1^{\alpha_{i1}} \ldots A_\sigma^{\alpha_{i\sigma}} \theta^{\chi_i})^\varpi,$$

qui diffère de B_i, ne serait pas égale à l'unité.

Or toutes les transformations de ce genre peuvent s'obtenir (*N. L.*, n° 32), en combinant avec les substitutions

$$A_k = |[\ldots \xi_k \ldots] \quad \theta^{\xi_k} [\ldots \xi_k \ldots]|,$$

les suivantes :

$$D_{kl} = |[\xi_1 \ldots \varepsilon'] \quad \theta^{-\xi_k \xi_l} [\xi_1 \ldots \varepsilon']|,$$

$$E_k = \left| [\xi_1 \ldots \varepsilon'] \quad \theta^{\frac{\xi_k(\xi_k - 1)}{2}} [\xi_1 \ldots \varepsilon'] \right|.$$

On aura donc

$$S = S_0 U,$$

S_0 multipliant toutes les variables de la série principale par θ^φ, où φ est une fonction du second degré en $\xi_1, \xi_2, \ldots$ et U les multipliant par des facteurs indépendants de $\xi_1, \xi_2, \ldots$.

On voit de même qu'on doit avoir $\pi' = \varpi$ et que U' doit être égal à $S'_0 U'$, S'_0 multipliant ces variables par $\theta^{\varphi'}$, où φ' est du second degré en $\xi'_1, \ldots, \xi'_{\sigma'}$, et U' les multipliant toutes par un même facteur de la forme θ^d.

Le facteur qui multiplie chaque variable sera donc de la forme

$$\theta^{\varphi + \varphi' + d},$$

et les variables inaltérées seront celles pour lesquelles on a

$$\varphi + \varphi' + d \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, \varpi),$$

Nous avons donc à chercher le nombre des solutions de cette congruence.

74. Par un changement de variables linéaires, nous pourrons la mettre sous la forme

$$\varphi + \varphi' + h \equiv 0. \qquad (\text{mod}\, \varpi),$$

φ étant une forme quadratique, ψ une forme linéaire ne contenant chacune qu'une partie des nouvelles variables, et h une constante.

Si ψ n'est pas identiquement nulle, la congruence déterminera une de ces variables, toutes les autres restant arbitraires; on aura donc

$$N = \frac{n}{\varpi} < \frac{n}{2}.$$

Si $\psi = 0$, soient k le nombre des variables de φ, Δ son discriminant. On aura

$$N = \frac{\mathfrak{N}_k}{\varpi^k} n,$$

$\mathfrak{N}_k$ désignant parmi les ϖ^k systèmes de valeurs qu'on peut attribuer aux variables de φ le nombre de ceux qui satisfont à la congrnence

$$\varphi + h = 0.$$

Ce nombre $\mathfrak{N}_k$ est donné par les formules connues (*Journal de Liouville*, 7e série, t. II, 1916, p. 257).

Si $k = 2m + 1$,

$$\mathfrak{N}_{2m+1} = \varpi^{2m} - \varpi^m \left[\frac{(-1)^m \Delta h}{\varpi}\right];$$

Si $k = 2m + 2$,

$$\mathfrak{N}_{2m+2} = \varpi^{2m+1} - \varpi^m \left[\frac{(-1)^m \Delta}{\varpi}\right],$$

les expressions entre crochets désignent des symboles de Legendre.

Il résulte de ces formules que N sera $< \frac{n}{2}$ à moins qu'on n'ait

$$\varpi = 3, \qquad k = 1, \qquad \left[\frac{\Delta h}{\varpi}\right] = 1,$$

auquel cas on aura

$$N = \frac{2}{3} n.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant qui précise celui du n° 68.

THÉORÈME. — *Le nombre* N *des fonctions qu'une substitution* S

d'ordre premier ϖ *contenue dans* L *ne peut surpasser*

$$\frac{3}{4}n \quad \text{si} \quad \varpi = 2,$$

$$\frac{n}{2} \quad \text{si} \quad \varpi > 3,$$

$$\frac{2}{3}n \quad \text{si} \quad \varpi = 3.$$

Mais même pour $\varpi = 3$ *il ne peut surpasser* $\frac{n}{2}$ *que si* n *est multiple de* 3.

VI. — Groupes abéliens contenus dans un groupe décomposable.

75. Désignons comme précédemment par L^0 un groupe primaire et résoluble contenu, soit dans le groupe linéaire à n variables mod p, soit dans le groupe plus restreint des substitutions linéaires qui laissent absolument invariante une forme Φ.

Par l'adjonction à L^0 de sa base B, nous obtiendrons un groupe résoluble et primitif G^0 de substitutions linéaires non homogènes.

Proposons-nous d'étudier les sous-groupes abéliens contenus dans G^0.

Soit H l'un d'eux. Ses substitutions sont de la forme SU, S appartenant à L^0 et U à B.

76. Supposons d'abord que l'ordre Ω de H soit premier à p.

Les substitutions partielles S', S'', ... de l'espèce S étant homogènes, échangeables entre elles et d'ordre premier à p, pourront être ramenées simultanément à une forme canonique monome. Nous grouperons dans une même série celles des nouvelles variables qui, dans chacune d'elles, ont toujours un même multiplicateur.

Soit s_0 l'une de ces séries contenant l_1 variables x', ..., x^{l_1} et soient a', a', ... les facteurs par lesquels elles sont toutes multipliées par les diverses substitutions S', S'', ... La détermination de ces facteurs aura exigé la résolution de congruences pouvant entraîner l'introduction d'une imaginaire i racine primitive d'une congruence

$$i^{p^{l_1}-1} \equiv 1 \qquad (\text{mod}\, p).$$

Les multiplicateurs a', a'', ... seront des puissances de i telles que $i^{\alpha'}, i^{\alpha''}, \ldots$ et si d_1 est le plus grand commun diviseur de $\alpha', \alpha'', \ldots, p^{\nu_1} - 1$, les substitutions S', S'', ... résulteront de la combinaison des puissances de l'une d'entre elles S_1 multipliant les variables de s_0 par i^{d_1}, avec des substitutions S', ... qui ne les altèrent plus.

La substitution S_1U_1 de H dont S_1 est le premier facteur, remplacera $x', \ldots, x^{l_1}$ par

$$i^{d_1}x' + \beta', \quad \ldots, \quad i^{d_1}x^{l_1} + \beta^{l_1},$$

les β étant des entiers complexes formés avec l'imaginaire i. On pourra d'ailleurs faire disparaître ces termes constants en prenant pour variables au lieu de $x', \ldots, x^{l_1}$ celles-ci $x' + \lambda', \ldots, x^{l_1} + \lambda^{l_1}$, les λ étant déterminés par les relations

$$(i^{d_1} - 1)\lambda' \equiv \beta', \qquad \ldots, \qquad (i^{d_1} - 1)\lambda^{l_1} \equiv \beta^{l_1} \qquad (\bmod p).$$

Quant aux substitutions $S''U''$, ... de H dont les premiers facteurs n'altèrent pas les variables de s_0, elles les laissent également invariables; car, dans le cas contraire où elles les accroîtraient de termes constants, l'ordre de H serait divisible par p, contrairement à notre hypothèse.

Si d'ailleurs ν_1 est > 1, la série s_0 ne sera pas isolée, mais appartiendra à un système $\mathfrak{s}_1$ de ν_1 séries conjuguées $s_0, \ldots, s_r, \ldots, s_{\nu_1 - 1}$; et S_1 multipliera les variables de s_r par i^{p^r}.

S'il y a des séries autres que celles-là, elles pourront de même être assemblées en systèmes analogues à $\mathfrak{s}_1$.

Nous pouvons donc formuler le théorème suivant :

Théorème. — *Par un choix convenable des variables indépendantes on pourra ramener toutes les substitutions de* H *à la forme homogène.*

Chacune d'elles sur un produit de puissances de substitutions $S_1, S_2, \ldots$ *n'altérant chacune que les variables d'un seul des systèmes* $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \ldots$ *entre lesquels lesdites variables peuvent se répartir.*

77. *Remarque.* — L'introduction des imaginaires a été utile pour la démonstration. Mais on peut substituer à l'ensemble formé par chaque variable complexe, jointe à ses conjuguées, celui des variables réelles dont elles dépendent; et la répartition des variables en systèmes subsistera.

78. Les substitutions $S_1, S_2, \ldots$ étant respectivement d'ordre $\frac{p^{\nu_1}-1}{d_1}, \ldots$, l'ordre D de H divisera le produit

$$\prod_k \frac{p^{\nu_k}-1}{d_k}.$$

D'ailleurs, si l_k est le nombre des variables de chaque série de S_k, le nombre n des variables sera au moins égal à $\Sigma l_k \nu_k$. Il serait même plus grand, si quelques variables, n'étant altérées par aucune substitution de H, restaient en dehors des systèmes s.

De la comparaison de ces nombres il résulte évidemment que Ω ne peut en aucun cas surpasser $p^n - 1$; et que pour qu'il atteigne ce nombre il faut qu'on n'ait qu'un seul système s_1, avec

$$\nu_1 = n, \; l' = d' = 1;$$

c'est le résultat invoqué au n° **15**.

79. *Remarque.* — Jusqu'à présent il n'a pas été parlé de forme invariante Φ. S'il y en a une, nous n'avons que peu de chose à ajouter.

Chaque série doit avoir une associée où les multiplicateurs sont réciproques des siens. Les deux associées peuvent d'ailleurs se confondre (groupes de 3e catégorie) ou être conjuguées (2e catégorie) ou enfin appartenir à deux systèmes différents associés l'un à l'autre (1re catégorie).

Dans ce dernier cas, nous réunirons les deux systèmes associés en un seul.

Cela posé, la forme Φ, pour être invariante, ne devra contenir aucun terme où figurent à la fois les variables de deux séries non associées. Elle sera donc une somme de formes partielles $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ ne contenant chacune que les variables d'un seul système. Et cette dernière propriété subsistera si l'on revient des variables complexes à des variables réelles.

Si L^0 est susceptible d'être employé comme groupe auxiliaire pour une construction ultérieure, n sera un nombre pair 2σ et il faudra ou que Φ soit bilinéaire, ou que p soit égal à 2. Dans l'un et l'autre cas, chacune des formes partielles $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ devra contenir un nombre pair de variables (sans quoi le discriminant de Φ serait nul). Leur nombre, ou celui des substitutions $S_1, S_2, \ldots$ génératrices de H, qui lui est égal, ne pourra donc surpasser σ.

80. La détermination des groupes H dont l'ordre est divisible par p est plus difficile. Mais il suffira, pour notre objet, d'obtenir une limite supérieure de leur ordre Ω.

Nous établirons tout d'abord le lemme suivant :

Lemme. — *Étant donné un groupe abélien* I *de substitutions linéaires homogènes à n variables, dont l'ordre Ω soit une puissance de p, on pourra choisir les variables indépendantes de telle sorte qu'elles se partagent en classes telles que chaque substitution de* I *accroisse les variables de chaque classe d'une fonction linéaire de celles des classes suivantes; celles de la dernière classe n'étant pas altérées.*

On peut admettre dans la démonstration que la vérité de cette proposition ait déjà été établie pour les groupes à moins de n variables.

Supposons pour plus de généralité que les variables $x_1, \ldots, x_n$ parcourent chacune le champ des p^ν entiers complexes formés avec une imaginaire d'ordre ν.

Soit S une des substitutions de I. Elle permutera les unes dans les autres les fonctions linéaires (à coefficients complexes) $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$. Le nombre $p^{\nu n} - 1$ de ces fonctions étant premier à p, il y en aura nécessairement quelques-unes que S n'altère pas. Si parmi ces fonctions inaltérées il y en a m distinctes, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, on pourra les prendre pour variables indépendantes à la place des dernières variables $x_{n-m+1}, \ldots, x_n$.

Les substitutions de I étant toutes échangeables à S devront permuter ensemble les fonctions inaltérées $b_1\varphi_1 + \ldots + b_m\varphi_m$. Chacune d'elles sera donc le produit de trois substitutions partielles, la première S_1 opérée entre les variables $x_1, \ldots, x_{n-m}$; la seconde S_2 les accroissant de fonctions linéaires des φ; la troisième S_3 opérée sur les φ.

Les substitutions S_1 d'une part, S_3 d'autre part, étant opérées entre moins de n variables, on pourra les ramener à la forme requise.

Nous allons maintenant établir le théorème suivant :

81. Théorème. — *L'ordre Ω d'un groupe abélien* H *ne peut surpasser p^n. S'il est égal à p^n,* H *contient des substitutions de* B.

Nous pourrons admettre que le théorème ait déjà été établi pour les groupes à moins de n variables. H sera encore vrai si H est contenu dans un groupe G^0 qui soit un produit de groupes partiels G_1^0, G_2^0, ... contenant respectivement $n_1, n_2, \ldots$ variables seulement, $n_1 + n_2 + \ldots$ étant égal à n.

En effet, chaque substitution de H étant un produit de substitutions S_1, S_2, ... appartenant respectivement à G_1^0, G_2^0, ..., Ω ne pourra surpasser $p^{n_1} p^{n_2} \ldots = p^n$.

Ce cas se présentera si L^0 étant décomposable, H ne permute pas transitivement les systèmes Σ_1, Σ_2, ... formés par ses variables.

S'il les permute transitivement, on aura $\Omega = \Omega_1 \Omega_2$, Ω_1 étant l'ordre du groupe abélien formé par les déplacements d'ensemble que H fait éprouver aux systèmes, Ω_2 l'ordre du groupe I formé par celles des substitutions de H qui ne déplacent pas les systèmes, lesquelles seront de la forme

$$V_1 V_2 \ldots V_k \ldots,$$

V_k étant opérée sur les variables de Σ_k.

Or, si l'on a m systèmes, de n' variables chacun, Ω_1 ne pourra surpasser m. D'autre part, les substitutions V_1 sont en nombre au plus égal à $p^{n'}$. Soit enfin une substitution de I où V_1 se réduise à l'unité. Pour qu'elle soit échangeable à celle des substitutions de H qui remplace Σ_1 par Σ_k, il faudra qu'on ait également $V_k = 1$ quel que soit k. Donc $\Omega_2 \leqq p^{n'}$ et $\Omega \leqq mp^{n'}$, quantité inférieure à $p^{mn'} = p^n$.

Si L^0 est indécomposable, mais à forme invariante et de première catégorie, ses variables se répartiront en deux demi-systèmes, et la démonstration se fera de la même manière.

82. Reste à établir le théorème pour les groupes indécomposables qui ne sont pas de première catégorie.

Nous montrerons tout d'abord que le *maximum de Ω est une puissance de p.*

Soit, en effet, H un groupe abélien dont l'ordre Ω ne soit ni premier à p ni puissance de p. Il sera le produit de deux groupes partiels H_1, H_2 dont les ordres Ω_1, Ω_2 sont respectivement premiers à p et puissance de p.

Nous avons vu que les variables de H_1 se répartissent en systèmes s_1, s_2, ... Les substitutions de H_2, étant échangeables à celles de H_1, devront remplacer les variables de chaque série par des fonctions linéaires de ces mêmes variables et, par suite, celles d'un système par des fonctions de celles de ce système.

Le théorème sera donc démontré en vertu de la remarque du numéro précédent, s'il y a plusieurs systèmes. S'il n'y en a qu'un, H_1 sera formé des puissances d'une seule substitution S_1 multipliant

les variables de la première série par i^d et d'ordre $\frac{p^\nu - 1}{d}$. On aura donc

$$\Omega = \Omega_1 \Omega_2 = \frac{p^\nu - 1}{d} \Omega_2.$$

Mais pour que les substitutions de H_2 soient échangeables à S_1, il faut qu'elles remplacent les variables de cette première série par des fonctions linéaires homogènes de ces variables. Une substitution linéaire opérée sur ces variables n'altérera pas l'expression de S_1 et mettra en évidence les diverses classes de variables dans H_2. Soient $x_1, \ldots, x_m$ les variables de la première classe. Parmi les substitutions de la base, nous en aurons $p^{\nu m}$ qui remplacent

$$x_1, \quad \ldots, \quad x_m \qquad \text{par} \qquad x_1 + \alpha_1, \quad \ldots, \quad x_m + \alpha_m,$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ étant des entiers complexes, et leurs conjuguées par des expressions conjuguées. Toutes ces substitutions U sont évidemment échangeables à celles de H_2 et leur adjonction à celles-ci donnera un groupe H′ dont l'ordre $p^{\nu m}\Omega_2$ sera $> \Omega$.

83. Le maximum de Ω ne devra donc être cherché que dans les groupes H dont l'ordre est puissance de p. Les substitutions d'un semblable groupe seront de la forme SU, S étant linéaire homogène et U appartenant à la base de G^0. Son ordre sera $\Omega_1 \Omega_2$, Ω_1 étant l'ordre du groupe I formé par les substitutions partielles S, Ω_2 celui du groupe J formé par celles des substitutions de H qui sont de la forme U. Mais il est évident que le produit des deux groupes I, J est abélien et puisqu'il a le même ordre que H il pourra lui être substitué dans la recherche du maximum.

84. Nous avons d'ailleurs ramené la question au cas où L^0 est indécomposable et non de première catégorie. Soient f la substitution génératrice de son premier faisceau, ν le nombre des séries conjuguées de μ variables chacune.

Si $\nu > 1$, on peut admettre que I ne contienne aucune substitution qui déplace ces séries. On pourrait en effet déterminer un autre groupe H′ ne les déplaçant plus et d'ordre supérieur à celui de (I, J).

En effet, désignons par P la substitution qui remplace chaque variable par sa première conjuguée, par Q une substitution qui ne

déplace plus les séries. Si I les déplaçait, il résulterait de la combinaison des puissances d'une substitution $P^\delta Q$ (δ divisant ν) avec un groupe I′ formé de substitutions de l'espèce Q. Et l'ordre Ω de (I, J) serait $\frac{\nu}{\delta}\Omega_1$, Ω_1 désignant l'ordre de (I′, J).

Or I′ étant abélien et d'ordre puissance de p, la base de L^0 contiendra $p^{\nu m}$ substitutions échangeables à celles de I′ et remplaçant les variables $x_{10}, \ldots, x_{m0}$ de la première série et de la première classe par $x_{10}+\alpha_1, \ldots, x_{m0}+\alpha_m$ et leurs conjuguées

$$x_{1r}, \ldots, x_{mr} \quad \text{par} \quad x_{1r}+\alpha_1^{p^r}, \ldots, x_{mr}+\alpha_m^{p^r}$$

sans altérer les variables dont le premier indice est $> m$.

Adjoignons-les à (I′, J). Nous obtiendrons un groupe abélien H′ contenu dans L^0 et d'ordre $\frac{p^{\nu m}}{q}\Omega_1$, q désignant le nombre des substitutions adjointes qui appartenaient déjà à J. Ces q substitutions devaient être échangeables à la substitution

$$P^\delta Q = \left| x_{kr} \quad \sum_l a_{lk}^{p^r} x_{l,r+\delta} \right|$$

$$(k=1, \ldots, \mu;\ l=1, \ldots, \mu;\ r=0, \ldots, \nu-1).$$

Les conditions d'échangeabilité sont

$$\alpha_k \equiv \sum_1^m a_{lk}\alpha_l^{p^\delta} \pmod p \qquad (k=1, \ldots, m),$$

$$0 = \sum_1^m a_{lk}\alpha_l^{p^\delta} \qquad (k=m+1, \ldots, \mu).$$

Ceux des coefficients a_{lk}, où l, m ne pouvant être nuls à la fois, l'une au moins de ces congruences ne sera pas identique; et considérée isolément elle déterminera l'un des α par une congruence de degré p^δ, en fonction des $m-1$ autres. Donc $q = p^{\nu(m-1)+\delta}$ et l'ordre de H′ sera $= p^{\nu-\delta}\Omega_1 > \Omega$, car $p^{\nu-\delta} > \frac{\nu}{\delta}$.

85. Il ne reste donc plus à examiner que le cas où L^0 étant indécomposable (et non de première catégorie), les variables forment

ν séries de μ variables chacune, et $H = (I, J)$, I étant abélien d'ordre puissance de p et formé de substitutions qui ne déplacent pas les séries, et J étant l'ensemble des substitutions de la base de G^0 qui sont échangeables à celles de I.

Les substitutions que nous aurons à considérer altérant d'une manière conjuguée les variables conjuguées, il suffira d'indiquer dans l'écriture les altérations qu'elles font subir aux variables de la première série.

Le groupe G^0 peut avoir diverses formes correspondant aux diverses décompositions distinctes de μ en facteurs

$$\mu = \pi^\sigma \pi'^{\sigma'} \ldots.$$

Si H est contenu dans plusieurs de ces groupes G^0 nous choisirons pour y appliquer le raisonnement celui où le nombre des facteurs π^σ, $\pi'^{\sigma'}$, ... est le plus grand.

Supposons, pour plus de clarté, qu'il y en ait deux. Les variables (de la première série) étant caractérisées par deux indices ε, η variables de 0 à $\pi^\sigma - 1$ et de 0 à $\pi'^{\sigma'} - 1$, L^0 résultera de la combinaison de substitutions des deux formes suivantes :

$$T = \left| [\varepsilon\eta] \quad \sum_l a_{\varepsilon l} [l\eta] \right| \qquad (l = 1, \ldots, \pi^\sigma - 1),$$

$$T = \left| [\varepsilon\eta] \quad \sum_l b_{l\eta} [\varepsilon l] \right| \qquad (l = 1, \ldots, \pi'^{\sigma} - 1).$$

Parmi les substitutions de l'espèce T que L^0 contient figurent celles d'un second faisceau h d'ordre $\pi^{2\sigma+1}$ et dérivé de 2σ substitutions génératrices $C_1, \ldots, C_{2\sigma}$. Les autres substitutions T que L^0 contient sont permutables à h. Pour les obtenir on construit un groupe auxiliaire résoluble $\mathfrak{L}^0$ de substitutions linéaires homogènes à 2σ variables (mod π). Par l'adjonction des substitutions $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_{2\sigma}$ de sa base on obtient un groupe $\mathfrak{G}^0$ auquel le groupe des substitutions T que l'on cherche sera isomorphe.

Les substitutions de l'espèce T' que contient L^0 s'obtiennent de même par la construction d'un groupe auxiliaire $\mathfrak{L}'^0$ à $2\sigma'$ variables (mod π').

86. Cela posé, soit S une quelconque des substitutions de I. Son ordre sera une puissance de p, telle que p^l.

D'ailleurs elle appartient à L^0. Donc elle est de la forme TT' On peut admettre que chacune des deux substitutions partielles T, T' ait également pour ordre une puissance de p. En effet l'égalité

$$(TT')^{p^l} = 1$$

montre que $T^{p^l} = T'^{-p^l}$ est à la fois de l'espèce T et de l'espèce T'. Mais les seules substitutions communes à ces deux formes sont des puissances de f.

Soit donc

$$T^{p^l} = f^{\alpha}, \qquad T'^{p^l} = f^{-\alpha}.$$

On aura

$$TT' = Tf^{\lambda}.T'f^{-\lambda}.$$

Les deux facteurs de ce nouveau produit seront respectivement des formes T et T'; d'ailleurs ils auront pour ordre des puissances de p si l'on détermine λ par la congruence

$$p^l\lambda + \alpha \equiv 0 \qquad (\text{mod}\ \omega),$$

ω étant l'ordre de f, lequel est premier à p.

87. Soient donc

$$T_1T'_1, \quad T_2T'_2, \quad \ldots$$

les substitutions de I, les substitutions partielles ayant toutes pour ordre des puissances de p. Aux substitutions T_1, T_2, ... correspondront dans le groupe auxiliaire $\mathfrak{G}^0$ des substitutions formant un groupe abélien dont l'ordre, étant une puissance de p, sera premier à π. Il résultera des puissances d'une seule génératrice $\mathfrak{T}_1$. Car s'il y en avait plusieurs, elles altéreraient des variables différentes. La base $\mathfrak{B} = (\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_{2\sigma})$ serait ainsi décomposée en plusieurs bases partielles $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, ... et le faisceau h qui lui correspond serait décomposé de même en faisceaux partiels h_1, h_2, ... répondant à une décomposition de μ où le facteur π^{σ} serait remplacé par un produit $\pi^{\sigma_1}\pi^{\sigma_2}$, ... contrairement à nos hypothèses.

On verra de même que les substitutions T_1, T'_2, ... sont des puissances d'une seule d'entre elles, T'_1.

88. Il est donc établi que les substitutions de I sont toutes de la forme $T_1^{\alpha}T_1'^{\beta}$. Mais pour que H soit d'ordre maximum il faut

que I contienne séparément les substitutions T_1^α, T_1^β. Car ce dédoublement, qui accroîtrait l'ordre de I, ne diminuerait pas l'ordre du groupe J formé des substitutions

$$U = |[\varepsilon\eta] \quad [\varepsilon\eta] + a_{\varepsilon\eta}|$$

échangeables à celles de I.

Pour le montrer, transformons T_1^α par une substitution de l'espèce T de manière à la ramener à la forme canonique. Les nouvelles variables formeront diverses suites telles que T_1^α accroisse chaque variable de l'une d'elles de la variable précédente (la première restant inaltérée). Soient

$$[k\eta] \qquad (k = 1, \ldots, m)$$

les variables d'une de ces suites choisie parmi les plus longues. A chaque valeur de η correspondra une suite semblable.

Opérant d'une manière analogue sur $T_1'^\beta$ nous obtiendrons pour chaque valeur de ε une suite

$$[\varepsilon l] \qquad (l = 1, \ldots, m').$$

Considérons les variables $|kl|$ où $k = 1, \ldots, m$, $l = 1, \ldots, m'$.

T_1^α remplacera $|kl|$ par $|kl| + [k-1, l]$.

T'^β la remplacera par $|kl| + |k, l-1|$.

Donc $T_1^\alpha T_1'^\beta$ la remplacera par

$$[kl] + [k-1, l] + [k, l-1] + [k-1, l-1].$$

Pour que U soit échangeable à $T_1^\alpha T_1'^\beta$, on aura la condition

$$a_{k-1,l} + a_{k,l-1} + a_{k-1,l-1} = 0.$$

On en déduit de proche en proche pour toutes les valeurs de k et de l

$$a_{k-1,l} = 0, \qquad a_{k,l-1} = 0,$$

ce qui montre que U est échangeable à T_1^α et à $T_1'^\beta$.

En effet, comme il n'existe aucune variable d'indice nul, on aura pour $l = 1$ et quel que soit k

$$a_{k-1,1} = 0.$$

En vertu de cette première relation, il viendra, si $l = 2$,

$$a_{k-1,2} = 0,$$

et ainsi de suite.

On verra de même que

$$a_{k,l-1} = 0.$$

Or les substitutions T_1^α sont des puissances d'une seule d'entre elles que nous pourrons désigner par T_1. De même les substitutions $T_1'^\beta$ seront des puissances d'une seule d'entre elles, T_1'.

Donc h, supposé maximum, résultera de la combinaison des deux génératrices T_1 et T_1'.

89. Il est maintenant facile de déterminer une limite supérieure de l'ordre de H.

En effet, si T_1 et T_1' ont pour ordres respectifs p^λ, $p^{\lambda'}$, on aura

$$\Omega = p^{\lambda+\lambda'} O,$$

O désignant le nombre des substitutions de la forme

$$|[\varepsilon\eta] \quad [\varepsilon\eta] + a_{\varepsilon\eta}|$$

qui sont échangeables à T_1 et à T_1'. Mais nous venons de voir que si T_1 et T_1' contiennent respectivement des suites de m et de m' termes, tous les nombres $a_{\varepsilon\eta}$ où ε ne surpasse pas m et η ne surpasse pas m' doivent être nuls, à l'exception d'un seul $a_{mm'}$. Donc, dans l'hypothèse la plus favorable, le nombre des $a_{\varepsilon\eta}$ non nuls ne peut surpasser $\mu - mm' + 1$. Chacun d'eux étant susceptible de p^ν valeurs, on aura

$$O = p^{n-(mm'-1)\nu},$$

d'où

$$\Omega = p^n \cdot p^{\lambda+\lambda'+(1-mm')\nu}.$$

D'ailleurs, on vérifie aisément que si T_1 remplace

$$[kl] \quad \text{par} \quad [kl] + [k-1, l],$$

T_1^p, $T_1^{p^2}$, ... le remplaceront par

$$[kl] + [k-p, l] \qquad (\text{mod}\, p),$$
$$[kl] + [k-p^2, l] \qquad (\text{mod}\, p),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc pour que T_1 soit d'ordre p^λ, il faut que m soit $> p^{\lambda-1}$. De même $m' > p^{\lambda'-1}$.

On aura donc

$$\Omega = p^n . p^{\lambda+\lambda-((p^{\lambda'-1}+1)(p^{\lambda-1}+1)-1)\nu}.$$

expression qui décroît évidemment à mesure que croissent λ et λ'. En les supposant égaux à l'unité elle devient $p^n . p^{2-3\nu}$ nombre $< p^n$.

Nous avons toutefois supposé que I contenait deux génératrices distinctes T_1 et T'_1. S'il n'y en avait qu'une T_1, on aurait l'inégalité

$$\Omega = p^n . p^{\lambda+(1-m)\nu},$$

où le second facteur se réduirait à l'unité, si $\lambda = 1$, $m = 2$, $\nu = 1$.

90. Remarque. — *Si Ω est égal à p^n, H contiendra nécessairement des substitutions de la base* B.

En effet, nous avons vu que les variables étant choisies de manière à se partager en classes les substitutions de B qui n'altèrent que celles de la première classe sont échangeables à celles de H. Si H ne les contenait pas, leur adjonction donnerait un groupe abélien H′ d'ordre $> p^n$, ce qui est impossible.

91. Soient L^0 un groupe primaire et indécomposable (avec ou sans forme invariante); f la substitution d'ordre ω qui engendre son premier faisceau: $\mu = \pi^\sigma \pi'^{\sigma'} \ldots$ le nombre des variables de chaque série; $h, h' \ldots$ ses seconds faisceaux. Le noyau de L^0 forme un groupe d'ordre $\omega\mu^2$ jouissant des propriétés suivantes :

Ses substitutions sont échangeables à f, et échangeables entre elles aux puissances près de f.

Théorème. — *Si quelque autre sous-groupe* H *de* L^0 *jouit des mêmes propriétés, son ordre* Ω *ne pourra surpasser* $\omega\mu^2$. *S'il lui est égal,* H *contiendra des substitutions de chacun des faisceaux* $h, h', \ldots$ *autres que les puissances de* f.

En effet, les substitutions de H sont des formes T, T′, ... A chaque substitution T correspond une substitution τ d'un groupe auxiliaire $\mathfrak{G}^0$ à 2σ variables (mod π). Les substitutions τ correspondant aux substitutions T contenues dans H constituent un groupe abélien $\mathfrak{H}$, dont l'ordre ne peut surpasser $\pi^{2\sigma}$.

Un raisonnement analogue s'applique aux substitutions $T_1, \ldots$

contenues dans H. Donc Ω aura pour maximum $\pi^{2\sigma}\pi'^{2\sigma'}\ldots O$, soit $\mu^2 O$, O étant le nombre des substitutions qui ont pour correspondante l'unité dans chacun des groupes auxiliaires. Ce sont les puissances de f, en nombre ω. Le maximum cherché est donc $\omega\mu^2$.

D'ailleurs, pour qu'il soit atteint, il faut que $\mathfrak{K}$ contienne des substitutions de la base de $\mathfrak{G}_0$. A chacune d'elles correspond une substitution de h, autre que les puissances de f.

On voit de même que H doit contenir des substitutions de h'.

92. Soit L^0 un groupe primaire et résoluble à $2n$ variables (mod 2) et à forme invariante.

L'ordre Ω d'un groupe abélien H contenu dans L^0 et dont toutes les substitutions sont d'ordre 2 sera au plus égal à 2^n.

La démonstration se ramène comme au n° **81** au cas où L^0 est indécomposable.

Soit ν' le nombre des séries conjuguées à l'une d'elles; elles contiendront chacune $\mu = \pi^\sigma\pi'^{\sigma'}\ldots$ variables, et les nombres π, π', ... divisant $\omega = 2^{\nu'}+1$ seront impairs.

Celles des substitutions de H qui ne déplacent pas les séries seront des formes T, T', ...

Aux substitutions T correspondront des substitutions τ d'un groupe auxiliaire $\mathfrak{G}^0$ à 2σ variables (mod π) et à forme invariante Ψ. Le groupe $\mathfrak{K}$ de ces substitutions τ sera abélien et dérivé de substitutions génératrices dont le nombre ne pourra surpasser σ (**79**). L'ordre de $\mathfrak{K}$ sera donc $2^\sigma < \pi^\sigma$.

D'ailleurs, les puissances de f étant d'ordre impair, à chaque substitution τ ne correspondra qu'une seule substitution T qui soit d'ordre 2.

Le nombre des substitutions de H qui ne déplacent pas les séries sera donc

$$2^{\sigma+\sigma'}\cdot\mu.$$

(Le signe = correspond au cas où $\mu = 1$.)

On a d'ailleurs $2n = 2\nu'\mu$.

Si L^0 est de deuxième catégorie, les $2\nu'$ séries sont toutes conjuguées et H pourra contenir une dernière génératrice rempla-

çant la série r par la série $r + \nu'$. On aurait alors

$$\Omega = 2\mu \leqq 2^{\mu\nu'} \geqq 2^n.$$

Si L^0 est de première catégorie, on aura deux systèmes associés contenant chacun ν' séries conjuguées. D'ailleurs on doit avoir

$$2^{\nu'} > 4, \qquad \text{d'où} \qquad \nu' \geqq 3.$$

L^0 peut contenir une génératrice échangeant les deux systèmes, et si ν' est un nombre pair $2\nu''$ une autre génératrice remplaçant la série r par la série $r + \nu''$. On aura donc :

Si ν' est pair $\geqq 4$,

$$\Omega \geqq 4\mu < 2^{\nu'\mu} < 2^n;$$

Si ν' est impair $\geqq 3$,

$$\Omega = 2\mu = 2^{\nu\mu} < 2^n.$$

95. Soient L^0 un groupe indécomposable de troisième catégorie; f la substitution génératrice de son premier faisceau (laquelle multiplie toutes les variables par -1); $\mu = 2^\sigma . 2^{\sigma'} \ldots$ le nombre des variables; $h, h', \ldots$ les seconds faisceaux.

Nous dirons pour abréger qu'un sous-groupe K de L^0 est *binaire* s'il jouit des deux propriétés suivantes :

1° *Ses substitutions sont échangeables entre elles aux puissances près de f;*

2° *Le carré de chacune d'elles est une puissance de f.*

Le groupe H_k formé par la réunion des k seconds faisceaux $h, \ldots, h^{(k-1)}$ est évidemment binaire, et si l'on pose

$$\sigma + \sigma' + \ldots + \sigma^{(k-1)} = s_k,$$

il aura pour ordre 2^{2s_k+1}.

THÉORÈME. — *Un groupe binaire* K *dont les substitutions sont échangeables à celles des seconds faisceaux $h^k, \ldots$ non contenus dans H_k et dont l'ordre serait 2^{s_k+r} contient au moins 2^r substitutions de H_k.*

En effet, d'après nos notations habituelles, les substitutions de K seront de la forme

$$TT' \ldots T^{(k-1)}.$$

Elles ont pour correspondantes des substitutions

$$\mathfrak{T}\mathfrak{T}' \ldots \mathfrak{T}^{(k-1)}$$

d'un groupe $\mathfrak{G}$ (complexe si $k > 1$) de substitutions linéaires homogènes à 2σ variables (mod 2). Celles-ci sont d'ordre 2 et forment un groupe abélien. Leur nombre ne peut donc surpasser 2^{s_k} (**92**).

Donc parmi les substitutions de K en nombre 2^{s_k+r}, il y en aura au moins 2^r ayant l'unité pour correspondante et par suite appartenant à H_k.

VII. — Un groupe complexe ou décomposable ne peut être contenu dans un groupe indécomposable.

94. Nous rechercherons dans cette Section si un groupe L^0 décomposable ou complexe peut être contenu dans un groupe indécomposable $\overline{L}^0$; et nous verrons que cette hypothèse est inadmissible.

Si L^0 est décomposable, il résultera de la combinaison de groupes indécomposables pareils $L_1^0, L_2^0, \ldots, L_m^0$ opérés sur les variables des divers systèmes $1, 2, \ldots, m$ avec un groupe transitif G de déplacements d'ensemble. Et si $\overline{L}^0$ contient L^0, il contiendra *a fortiori* le groupe complexe $(L_1^0, L_2^0, \ldots)$.

Nous commencerons par montrer que *la substitution $\overline{f}$ génératrice du premier faisceau de $\overline{L}^0$ est un produit de substitutions $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_m$ opérées respectivement sur les variables des systèmes* 1, 2, ... (et d'une *dernière substitution ψ, opérée sur les variables de $\overline{L}^0$ qui ne figurent pas dans L^0, s'il existe de telles variables*).

La démonstration s'appliquera d'ailleurs au cas où m étant égal à 1, le groupe L^0 serait indécomposable, pourvu toutefois qu'il contienne plus d'une variable.

Notre point de départ sera dans la remarque suivante :

Si S, T *sont deux substitutions quelconques de* $\overline{L}^0$, $S^{-1}\overline{f}S$, $T^{-1}\overline{f}T$ *seront des puissances de f et* $S^{-1}T^{-1}ST$ *lui sera échangeable.*

Soit L_1^0 l'un quelconque des groupes semblables $L_1^0, L_2^0, \ldots$. Supposons qu'il contienne plusieurs variables se partageant en

séries de μ variables chacune. Si $\mu > 1$, soit

$$h_s = \begin{pmatrix} \theta_s, & A_{1s} \ldots \\ & B_{1s} \ldots \end{pmatrix},$$

l'un des seconds faisceaux de L_s^0, $\bar{f}$ devra être échangeable à la substitution

$$A_{1s}^{-1} B_{1s}^{-1} A_{1s} B_{1s} = \theta_s,$$

laquelle n'altère aucune variable sauf celles du système L_s^0 qu'elle multiplie par des facteurs différents de l'unité.

Pour que $\bar{f}$ soit échangeable à toutes les substitutions $\theta_1, \theta_2, \ldots$, il faudra donc qu'elle soit de la forme indiquée

$$\bar{f} = \varphi_1 \varphi_2 \ldots \psi.$$

Si $\mu = 1$, L_s^0 sera dérivé d'une substitution f_s génératrice de son premier faisceau, à laquelle il faudra joindre, s'il y a plusieurs séries conjuguées, une substitution P_s qui les permute circulairement, et si L_s^0 est de première catégorie une substitution R_s échangeant les séries associées. Et $\bar{f}$ sera échangeable aux substitutions

$$P_s^{-1} f_s^{-1} P_s f_s = f_s^{1-p}, \qquad R_s^{-1} f_s^{-1} R_s f_s = f_s^{-2},$$

dont l'une existe nécessairement si L_s^0 contient plusieurs variables comme nous l'avons supposé. On en déduit, comme dans le cas précédent, que $\bar{f}$ est de la forme $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \psi$.

Supposons enfin que L_s^0 ne contienne qu'une variable x_s. Il sera formé des puissances de la substitution

$$[x_s \quad g x_s] \qquad (\bmod p),$$

g désignant une racine primitive de p s'il n'y a pas de forme invariante. S'il y en a une elle sera quadratique; L_s^0 sera de troisième catégorie et l'on aura $g = -1$.

Le groupe G contenant une substitution S qui fait succéder au système s un autre système arbitraire t, $\bar{f}$ sera échangeable à la substitution

$$f_s^{-1} S^{-1} f_s S = f_t^{-1} f_t,$$

laquelle multiplie x_s par g^{-1}, x_t par g, sans altérer les autres variables.

Si donc g n'est pas égal à -1, $\bar{f}$ multipliera x_s et x_t par des facteurs constants et sera encore de la forme requise.

Si $g=-1$, $\bar{f}$ pourrait faire succéder à x_s une fonction linéaire de x_s et de x_t. Mais si L^0 contient un troisième système u différent des précédents, $\bar{f}$ sera échangeable à $f_u^{-1}f_u$ qui multiplie x_s par -1 sans altérer x_t. Donc ici encore $\bar{f}$ multipliera x_s par un facteur constant.

Les seuls cas qui échappent à la démonstration sont donc les suivants :

1° Pas de forme invariante : -1 racine primitive de p; donc $p=3$: en outre, L^0 n'a que deux systèmes. Ce cas est exclu (**56**);

2° L^0 admet une forme invariante : il est décomposable et ne contient que deux variables. Ce cas est également exclu (**55**).

95. Supposons maintenant que L^0 soit complexe et résulte de l'association de groupes primaires L'^0, L''^0, ... supposés chacun maximum dans son espèce.

Il est impossible que parmi ces groupes il y en ait plus d'un ne contenant qu'une variable, car s'il y en avait deux ils seraient semblables et ce cas est exclu (**55**). Si parmi les autres groupes il y en avait un L'^0 décomposable, il contiendrait un groupe complexe $(L_1^0, \ldots, L_m^0)$ qu'on pourrait lui substituer dans le raisonnement. Donc $\bar{L}^0$ contiendrait un groupe complexe

$$L_1^0, \quad \ldots, \quad L_m^0, \quad L_{m+1}^0, \quad \ldots$$

formé de l'association de groupes indécomposables, et $\bar{f}$ serait de la forme

$$\bar{f}=\varphi_1\ldots\varphi_m\varphi_{m+1}\ldots\psi,$$

ψ ne pouvant contenir que la variable d'un dernier groupe qui aurait échappé aux raisonnements précédents.

La question de reconnaître si L^0 peut contenir L^0 est donc ramenée au cas où L^0 est complexe et formé de groupes indécomposables L_1^0, L_2^0, ... et il est démontré que f doit être de la forme

$$f=\varphi_1\varphi_2\ldots.$$

Toutefois, si plusieurs des groupes L_1^0, L_2^0, ... sont semblables

on devra se rappeler que le groupe $(L_1^0, L_2^0, \ldots)$ n'est pas celui qui nous était donné à l'origine. Il a été déduit de ce dernier par la suppression de déplacements d'ensemble opérés sur ces groupes semblables. Leur rétablissement donnera un ou plusieurs groupes décomposables qui devront être supp[illegible] maxima. L'un de ces groupes maxima devrait être conter[illegible] ans $\overline{L}^0$.

96. Soit $\overline{\omega}$ l'ordre de $\overline{f}$. Toutes les puissances de cette substitution (sauf l'unité) ne laissant aucune fonction invariable, les substitutions partielles $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ devront également avoir $\overline{\omega}$ pour ordre.

D'autre part, soit L_k^0 l'un quelconque des groupes qui constituent L^0. Ses subtitutions doivent transformer $\overline{f}$ en une de ses puissances. Mais elles n'altèrent pas les facteurs φ autres que φ_k. Donc elles sont toutes échangeables à φ_k. Mais les seules substitutions entre les variables de L_k^0 qui soient échangeables à toutes celles de L_k^0 sont celles de son premier faisceau F_k, dont nous désignerons l'ordre par ω_k. Donc $\overline{\omega}$ divise ω_k.

Cela posé, soient μ_k le nombre des variables de chaque série dans L^0,

$$f_k \quad \begin{matrix} A_1 \ldots A_\sigma, & A'_1 \ldots, \\ B_1 \ldots B_\sigma, & B'_1 \ldots, \end{matrix}$$

les substitutions dont son noyau est dérivé. Les substitutions f_k $A_1, \ldots, A_\sigma, A', \ldots$ forment un groupe abélien d'ordre $\omega_k \mu_k$. En associant les groupes analogues pour les diverses valeurs de k, on voit que L^0 contient un groupe abélien d'ordre

$$\prod_k \omega_k \mu_k$$

Mais si $\overline{\mu}$ est le nombre des variables de chaque série dans $\overline{L}^0$, l'ordre d'un semblable groupe contenu dans $\overline{L}^0$ ne peut surpasser $\overline{\omega}\,\overline{\mu}^2$ (**91**).

On aurait donc l'inégalité

$$\prod_k \omega_k \mu_k \leqq \overline{\omega}\,\overline{\mu}^2.$$

Avant de la discuter il conviendra de mettre en évidence les

nombres n_k, $\bar{n}$ de variables contenues dans les groupes L_k^0, $\bar{L}^0$. S'ils contiennent respectivement ν_k et $\bar{\nu}$ séries, on aura évidemment

$$\mu_k = \frac{n_k}{\nu_k}, \qquad \bar{\mu} = \frac{\bar{n}}{\bar{\nu}}.$$

De sorte que l'inégalité deviendra

$$\bar{\nu} \prod_k \frac{\omega_k}{\nu_k} n_k \leqq \frac{\bar{\omega}}{\bar{\nu}} \bar{n}^2.$$

97. Or il est aisé de voir que $\frac{\omega_k}{\nu_k}$ ne peut être inférieur à $\frac{\omega}{\nu}$, qui lui-même sera plus grand que l'unité.

En effet, s'il n'y a pas de forme invariante, on aura

$$\frac{\bar{\omega}}{\bar{\nu}} = \frac{p^{\bar{\nu}} - 1}{\bar{\nu}};$$

mais $p^{\bar{\nu}} > 2$. Le minimum de cette expression sera donc $\frac{3}{2}$; il correspond à $p^{\bar{\nu}} = 4$. Si p est impair son minimum sera 2.

D'autre part, $\omega_k = p^{\nu_k} - 1$, étant divisible par $\bar{\omega} = p^{\bar{\nu}} - 1$, ν_k sera un multiple de $\bar{\nu}$, tel que $m\bar{\nu}$; donc

$$\frac{\omega_k}{\nu_k} : \frac{\bar{\omega}}{\bar{\nu}} = \frac{p^{m\bar{\nu}} - 1}{m(p^{\bar{\nu}} - 1)},$$

expression croissante avec m et égale à 1 pour $m = 1$.

S'il y a une forme invariante on aura, suivant la catégorie à laquelle appartient $\bar{L}^0$, $\bar{\nu}'$ désignant un entier :

Première catégorie :

$$\bar{\nu} = 2\bar{\nu}'; \qquad \bar{\omega} = p^{\bar{\nu}'} - 1 \qquad (p^{\bar{\nu}'} > 1).$$

Deuxième catégorie :

$$\bar{\nu} = 2\bar{\nu}'; \qquad \bar{\omega} = p^{\bar{\nu}'} + 1.$$

Troisième catégorie :

$$\bar{\nu} = 1; \qquad \bar{\omega} = 2 \qquad (p \text{ impair}).$$

Le minimum de $\frac{\bar{\omega}}{\bar{\nu}}$ sera $\frac{7}{6}$; pour $\bar{\nu}' = 3$, $\bar{\omega} = 2^3 - 1$. Mais si p est impair le minimum sera 2.

On aura des expressions analogues pour $\frac{\omega_k}{\nu_k}$ en remplaçant $\bar{\nu}'$ par ν'_k.

Si $\bar{\omega} = p^{\bar{\nu}'} - 1$,

$$\nu_k = m\bar{\nu}', \qquad \omega_k = p^{m\bar{\nu}} - 1;$$

si $\bar{\omega} = p^{\bar{\nu}'} + 1$,

$$\nu_k = 2m\bar{\nu}, \qquad \omega_k = p^{2m\bar{\nu}} - 1,$$

ou

$$\nu_k = (2m-1)\bar{\nu}', \qquad \omega_k = p^{(2m-1)\bar{\nu}} + 1.$$

On voit par ces formules que $\frac{\omega_k}{\nu_k}$ croît avec m et que déjà pour $m = 1$, il est égal ou même supérieur à $\frac{\bar{\omega}}{\bar{\nu}}$.

Enfin si $\bar{\omega} = 2$, les trois formes de ω_k sont admissibles, mais p étant impair, aucune d'elles ne donnera une valeur moindre que 2 à $\frac{\omega_k}{\nu_k}$.

98. On a d'ailleurs

$$\Sigma n_k = n,$$

et les substitutions de L_k^0 laissent inaltérées au moins $\bar{n} - n_k$ fonctions des variables. Mais ce nombre ne peut être supérieur à $\frac{3}{7}n$ (**68**). Donc chacun des nombres n_k est au moins égal à $\frac{n}{7}$.

En outre, si $n_k < \frac{n}{2}$, l'ordre Ω_k de L_k^0 ne pourra être divisible par aucun facteur premier impair q autre que 3. Il ne le sera même pas par 3 à moins qu'on n'ait à la fois

$$n_k > \frac{\bar{n}}{3}, \qquad \bar{n} \equiv 0 \pmod 3.$$

En effet si ces conditions n'étaient pas remplies $\bar{L}^0$ contiendrait une substitution d'ordre q (ou d'ordre 3) laissant invariantes

$\bar{n} - n_k$ fonctions, nombre supérieur à $\frac{\bar{n}}{2}$, ce qui a été démontré impossible (**74**).

99. Or si Ω_k se réduit d'après ce qui précède à une puissance de 2, p sera impair, μ_k égal à l'unité, et n_k à une puissance de 2. Car si p était égal à 2, l'ordre ω_k du premier faisceau de L_k^0 serait $p^{\nu_k} - 1$ ou $p^{\nu_k} \pm 1$, nombre impair. D'autre part, si μ_k avait un diviseur impair π, L_k^0 contiendrait un second faisceau d'ordre $\pi^{2\sigma+1}$ impair. Si l'on avait $\mu_k = 2^\sigma . 2^\sigma . \ldots$, la construction de L_k^0 dépendrait de celle d'un groupe isomorphe à 2σ variables (mod 2), dont le premier faisceau serait d'ordre impair.

Enfin μ_k étant égal à l'unité, on aura

$$\Omega_k = \omega_k n_k.$$

Donc n_k, de même que Ω_k, n'aura aucun diviseur impair.

100. Nous sommes maintenant en mesure de discuter l'inégalité fondamentale

$$\bar{\nu} \prod \frac{\omega_k}{\nu_k} n_k = \frac{\bar{\omega}}{\bar{\nu}} \bar{n}^2.$$

Les relations

$$\Sigma n_k = \bar{n}, \qquad n_k = \frac{n}{4}$$

montrent que le produit Π ne peut contenir plus de quatre facteurs.

Supposons d'abord qu'il y en ait quatre. On aura

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = \frac{1}{4}\bar{n},$$

d'où

$$\bar{n}^2 = 16 n_3 n_4.$$

D'autre part (p étant impair et $\mu_1 = \ldots = \mu_4 = 1$)

$$\frac{\omega_3}{\nu_3} \frac{\omega_4}{\nu_4} \left(\frac{\bar{\omega}}{\bar{\nu}}\right)^2 = 4.$$

Enfin

$$n_1 = \nu_1 \mu_1 = \nu_1, \qquad n_2 = \nu_2 \mu_2 = \nu_2.$$

On aura donc *a fortiori*

$$\bar{\nu}\omega_1\omega_2 \leqq 4.$$

D'ailleurs ω_1, ω_2 sont > 1 et puissances de 2. La seule solution sera donc

$$\bar{\nu} = 1, \qquad \omega_1 = \omega_2 = 2.$$

Or s'il n'y a pas de forme invariante, on a

$$\omega_k = p^{\nu_k} - 1.$$

La relation

$$\omega_1 = p^{\nu_1} - 1 = 2$$

donne

$$\nu_1 = 1, \qquad p = 3.$$

S'il y a une forme invariante, les relations montrent que $L_1^0, \ldots$ sont de troisième catégorie; donc

$$\nu_1 = \nu_2 = \ldots = 1.$$

Donc les groupes $L_1^0, \ldots, L_4^0$ ne contiennent chacun qu'une variable, et s'il n'y a pas de forme invariante, le module p est égal à 3. Ce cas a été signalé et exclu (**37**).

101. Passons au cas de trois facteurs.

Soit $n_1 \geqq n_2 \geqq n_3$: n_1 sera compris dans l'intervalle de $\frac{\bar{n}}{4}$ à $\frac{\bar{n}}{3}$; n_2 et n_3 dans celui de n_1 à $\bar{n} - 2n_1$; et leur produit sera au moins égal à $n_1(\bar{n} - 2n_1)$, expression qui varie de $\frac{n^2}{8}$ à $\frac{n^2}{9}$ lorsque n_1 varie de $\frac{n}{4}$ à $\frac{n}{3}$.

Reprenons l'inégalité fondamentale

$$\bar{\nu}\frac{\omega_1}{\nu_1} n_1 \frac{\omega_2}{\nu_2} n_2 \frac{\omega_3}{\nu_3} n_3 \geqq \frac{\bar{\omega}}{\bar{\nu}} \bar{n}^2.$$

On a, comme on vient de le voir, $\bar{n}^2 \leqq 9 n_2 n_3$. D'autre part

$$\frac{\omega_2}{\nu_2}\frac{\omega_3}{\nu_3} \geqq \left(\frac{\bar{\omega}}{\bar{\nu}}\right)^2, \qquad n_1 = \nu_1 \mu_1.$$

Il en résulte donc

$$\omega_1 \mu_1 \bar{\omega} \leqq 9.$$

D'ailleurs ω_1 est divisible par $\overline{\omega}$. Les seules solutions seraient donc

$$\overline{\omega}_1 = \omega_1 = 3, \qquad \mu_1 = 1,$$
$$\overline{\omega} = 2, \qquad \omega_1 = 4, \qquad \mu_1 = 1;$$
$$\overline{\omega} = \omega_1 = 2, \qquad \mu = 1 \text{ ou } 2.$$

102. La première solution est à rejeter.

En effet, s'il n'y a pas de forme invariante, on aura

$$\omega_1 = p^{\nu_1} - 1 = 3, \qquad \text{d'où} \qquad p^{\nu_1} = 2^2, \quad p = 2, \quad \nu_1 = 2 \quad \text{et} \quad \mu_1 = 1.$$

Donc L_1^0 n'a que deux variables (mod 2) et dérive des deux substitutions

$$f_1 = |x_0, x_1 \quad i x_0, i^2 x_1|, \qquad P_1 = |x_0, x_1 \quad x_1, x_0| \qquad [i^2 \equiv 1 \pmod 2].$$

S'il y a une forme invariante, L_1^0 ne pourra être ni de première catégorie, car on aurait $\omega_1 = p^{\nu_1} - 1 > 3$ (p^{ν_1} étant > 4), ni de troisième, car on aurait $\omega_1 = 2$.

S'il est de deuxième catégorie, on aura $\nu_1 = 2\nu'_1$, et

$$\omega_1 = p^{\nu'_1} + 1 = 3, \qquad \text{d'où} \qquad p = 2, \qquad \nu'_1 = 1.$$

On aura donc encore deux variables x_0, x_1, et L_1^0 aura la même expression que tout à l'heure.

Or $\overline{f}$ devrait être de la forme $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$, φ_1 étant une puissance de f_1 échangeable à toutes les substitutions de L_1^0. Mais aucune de ces puissances, sauf l'unité, n'est échangeable à P_1. On aurait donc $\varphi_1 = 1$, et $\overline{f}$ laisserait inaltérées les variables de L_1^0, ce qui est impossible.

103. Soit donc $\overline{\omega} = 2$. S'il n'y a pas de forme invariante la relation $\overline{\omega} = p^{\overline{\nu}} - 1 = 2$ montre qu'on aura $p = 3$, $\overline{\nu} = 1$. Les variables de $\overline{L}^0$ ne forment donc qu'une série; et $\overline{\nu} = 1$.

D'ailleurs $\overline{\mu}$ ne contenant que des facteurs qui divisent $\overline{\omega}$ sera une puissance de 2.

Le nombre des variables de $\overline{L}^0$ n'étant pas divisible par 3, on aura $\mu_1 = 1$ (**99**).

La relation $\omega_1 = 2$ ou 4 deviendra

$$3^{\nu_1} - 1 = 2 \text{ ou } 4.$$

Elle ne peut être satisfaite que si $\nu_1 = 1$, $\omega_1 = 2$.

Donc L_1^0 ne contient qu'une variable x et il est formé des substitutions

$$|x \quad \pm x| \qquad (\text{mod } 3).$$

Donc $\overline{L}^0$ contiendra quatre variables, dont une seule y appartiendra à L_2^0 ; et les mêmes raisonnements qui ont été faits pour L_1^0 montrent que L_2^0 sera formé des substitutions

$$|y \quad \pm y| \qquad (\text{mod } 3).$$

Les groupes L_1^0, L_2^0 sont donc semblables et l'on devra rétablir la substitution qui permute x et y. Mais le groupe décomposable ainsi obtenu est exclu (**56**). Cette hypothèse est donc à rejeter.

S'il y a une forme invariante, la condition $\omega = 2$ montre que $\overline{L}^0$ doit être de troisième catégorie. Le nombre $\overline{n}$ de ses variables sera une puissance de 2. Donc $\mu_1 = 1$. Si $\omega_1 = 2$, L_1^0 sera également de troisième catégorie et $n_1 = 1$. Donc $\overline{n} = 4$, $n_2 = 1$, L_1^0, L_2^0 seront formés des substitutions

$$|x \quad \pm x|, \qquad |y \quad \pm y| \qquad (\text{mod } p,\ p \text{ impair}).$$

Après le rétablissement de la substitution

$$|x, y \quad y, x|,$$

on obtiendrait comme dans le cas précédent un groupe décomposable rentrant dans un cas exclu (**55**).

104. Il faut donc supposer $\omega_1 = 4$. On en déduit si L_1^0 est de première catégorie

$$p^{\nu_1} - 1 = 4, \qquad \text{d'où} \qquad \nu_1 = 1, \quad p = 5,$$

et s'il est de deuxième catégorie

$$p^{\nu_1} + 1 = 4, \qquad \text{d'où} \qquad \nu_1 = 1, \quad p = 3.$$

Dans l'un et l'autre cas $\nu_1 = 2\nu_1' = 2$. Donc $n_1 = 2$.

La forme partielle Φ_1 que L_1^0 laisse invariante sera quadratique, car en la supposant bilinéaire, on tomberait sur un cas exclu (**43** et **44**).

Donc L_1^0 sera dérivé des substitutions

$$f_1 = |x, y \quad gx, g^{-1}y|, \qquad R_1 = |x, y \quad y, x| \qquad [g^4 \equiv 1 \pmod 5]$$

ou des substitutions

$$f_1 = |x_0, x_1 \quad i^2 x_0, i^6 x_1|, \qquad P_1 = |x_0, x_1 \quad x_1, x_0| \qquad [i^8 \equiv 1 \pmod 3].$$

Dans les deux cas son ordre sera 8.

Le nombre $\bar{n}$ étant $> 2n_1$, mais $\leqq 4n_1$, sera égal à 8; n_2 et n_3 étant pairs, on aura $n_2 = 2$, $n_3 = 4$.

Raisonnant sur L_2^0 comme sur L_1^0 on voit qu'on aura $\omega_2 = 4$ et et que L_2^0 est semblable à L_1^0.

Le groupe décomposable Λ^0 résultant de l'adjonction à L_1^0, L_2^0 de la substitution qui les permute aura pour ordre 2^7. En désignant par O l'ordre de L_3^0, celui du groupe (Λ^0, L_3^0) sera 2^7O.

Mais ce groupe doit être contenu dans $\bar{L}^0$, dont l'ordre est égal au produit de 2^7 ordre de son noyau par le nombre Ω^0 des substitutions paires du groupe auxiliaire $\mathfrak{L}$ primaire ou complexe à six variables et à forme invariante quadratique Ψ (mod 2) qui sert à achever sa construction.

Donc O devrait diviser Ω^0. Or il est aisé de voir que cela ne peut avoir lieu.

En effet, si $\mu_3 = 1$, O sera égal à $(5^2 \pm 1)4$ ou à $(3^2 \pm 1)4$.

Si $\mu_3 = 2$, il sera égal à $(5 \pm 1)2.24$ ou à $(3 + 1)2.24$.

Si $\mu_3 = 4$, L_1^0 étant de troisième catégorie, son noyau sera d'ordre 2^3, nombre dont O sera un multiple.

Donc O sera dans tous les cas divisible ou par 2^5 ou par $2^3.13$ ou par $2^3.5$.

Soit, d'autre part, Ω l'ordre de $\mathfrak{L}$.

Si $\mathfrak{L}$ est indécomposable, on aura

$$\Omega = (2^3 \pm 1)6 \text{ ou } (2 + 1)3^2.2.24.$$

Si $\mathfrak{L}$ est décomposable, $\Omega = 2.3(2.3)^3$.

Si $\mathfrak{L}$ est complexe, $\Omega = (2^2 + 1)4.2.3$, mais $\mathfrak{L}$ contenant des

substitutions impaires on aura

$$\Omega^0 = \frac{1}{2}\Omega.$$

Donc Ω^0 ne sera divisible ni par 2^5 ni par 13, ni par $2^3 . 5, 3^2$.

104. Passons enfin au cas où L^0 est formé de deux groupes partiels L_1^0, L_2^0. L'inégalité fondamentale deviendra

$$\bar{\nu}\frac{\omega_1}{\nu_1} n_1 \frac{\omega_2}{\nu_2} n_2 \leqq \frac{\bar{\omega}}{\bar{\nu}} \bar{n}^2.$$

D'ailleurs n_1 n_2 sont compris dans l'intervalle de $\frac{1}{4}\bar{n}$ à $\frac{3}{4}\bar{n}$; donc

$$\bar{n}^2 \geqq \frac{16}{3} n_1 n_2.$$

L'inégalité devient donc

$$\bar{\nu}\frac{\omega_1}{\nu_1}\frac{\omega_2}{\nu_2} \leqq \frac{16}{3}\frac{\bar{\omega}}{\bar{\nu}}.$$

Chacun des deux nombres $\frac{\omega_1}{\nu_1}$, $\frac{\omega_2}{\nu_2}$ étant au moins égal à $\frac{\bar{\omega}}{\bar{\nu}}$, l'autre facteur devra être au plus égal à $\frac{16}{3}$.

Soit donc

$$\bar{\nu}\frac{\omega_1}{\nu_1} \leqq \frac{16}{3}, \qquad \bar{\nu}\frac{\omega_2}{\nu_2} < \frac{16}{3}.$$

S'il n'y a pas de forme invariante, la première de ces relations donnera (ν_1 étant un multiple de $\bar{\nu}$, tel que $m_1\bar{\nu}$)

$$p^{m_1\bar{\nu}} - 1 \leqq \frac{16}{3} m_1,$$

et limitera p et $\bar{\nu}$.

Si $p = 2$ ($p^{\bar{\nu}}$ étant nécessairement > 2, d'où $\bar{\nu} > 1$), la seule solution sera $m_1 = 1$, $\nu_1 = \bar{\nu} = 2$. De même $\nu_2 = 2$.

Mais cette solution est inacceptable; car il en résulterait

$$\bar{\omega} = \omega_1 = \omega_2 = 3;$$

le nombre des variables de chaque série dans les groupes $\bar{L}^0$,

L_1^0, L_2^0 serait donc une puissance de 3; on aurait donc $n = 2.3^{\bar{\rho}}$, $n_1 = 2.3^{\rho_1}$, $n_2 = 2.3^{\rho_2}$, et la somme de deux puissances de 3 ne pouvant être puissance de 3, l'égalité $n_1 + n_2 = \bar{n}$ serait impossible.

Si $p = 3$, on a la seule solution $m_1 = 1$, $\bar{\nu} = \nu_1 \nu_2 = 1$; car le cas où $p^{\nu_1} = 3^2$ est exclu (**41**).

$\bar{\omega}$, ω_1, ω_2 étant égaux à 2, $\bar{n}$, n_1, n_2 seront des puissances de 2. Mais la somme de deux puissances de 2 ne peut être puissance de 2 que si elles sont égales. Donc

$$n_1 = n_2 = \frac{1}{2}\bar{n}.$$

Ces solutions où $n_1 = n_2 = \frac{1}{2}n$ seront discutées plus loin.

Si $p = 5$, on a de même une seule solution

$$\bar{\nu} = \nu_1 = \nu_2 = 1, \qquad \text{d'où} \qquad \bar{\omega} = \omega_1 = \omega_2 = 4;$$

$\bar{n}$, n_1, n_2 seront encore des puissances de 2; et $n_1 = n_2 = \frac{1}{2}\bar{n}$.

Si $p > 5$, on n'a plus aucune solution.

103. Passons au cas d'une forme invariante.

Si $\bar{L}^0$ est de première catégorie, on aura

$$\bar{\nu} = 2\bar{\nu}', \ \bar{\omega} = p^{\bar{\nu}'} - 1 > 3;$$

L_1^0 et L_2^0 seront de première catégorie; car ω_1, ω_2 doivent être divisibles par $\bar{\omega}$. Or si L_1^0 par exemple était de troisième catégorie, on aurait $\omega_1 = 2$; et s'il était de seconde catégorie, ω_1 serait de la forme $p^{\nu_1} + 1$, qui, divisé par $\bar{\omega}$, donnerait un reste $p^{\nu} + 1$, ν étant $< \nu_1$.

On aura donc

$$\omega_1 = p^{\nu'_1} - 1, \qquad \nu'_1 = m_1 \bar{\nu}',$$

et l'inégalité

$$p^{m_1 \bar{\nu}} - 1 \leqq \frac{16}{3} m_1.$$

Le groupe L_2^0 donnera une inégalité toute semblable. Ces inégalités sont impossibles si $p > 5$; ou si p étant égal à 5, $\bar{\nu}' > 1$.

Si $p = 5$ on aura la solution

$$m_1 = m_2 = 1, \qquad \bar{\nu} = \nu_1 = \nu_2, \qquad \bar{\omega} = \omega_1 = \omega_2 = 4.$$

Ici encore $\bar{n}$, n_1, n_2 seront des puissances de 2 et l'on aura $n_1 = n_2 = \frac{1}{2}n$. Nous sommes convenus de réserver l'examen des cas de ce genre.

Si $p = 2$ ou 3 et $\bar{\nu}' > 2$, les inégalités sont impossibles. On aurait une solution pour $m_1 = m_2 = 1$ et $p^{\bar{\nu}'} = 3^2$; mais ce cas est exclu (**58**).

Enfin $p^{\bar{\nu}'}$ étant > 4, la discussion est terminée.

106. Si $\bar{L}^0$ est de deuxième catégorie, on aura

$$\bar{\nu} = 2\bar{\nu}', \qquad \bar{\omega} = p^{\bar{\nu}'} + 1 > 2,$$

et ni L_1^0, ni L_2^0 ne pourront être de troisième catégorie.

Supposons d'abord que L_1^0 soit de première catégorie. On aura

$$\nu_1 = 2\nu_1', \qquad \nu_1' = 2m_1\bar{\nu}', \qquad \omega_1 = p^{2m_1\bar{\nu}'} - 1,$$

et l'inégalité

$$\bar{\nu}\frac{\omega_1}{\nu_1} \leqq \frac{16}{3}$$

deviendra

$$p^{2m_1\bar{\nu}'} - 1 \leqq \frac{16}{3}2m_1.$$

Cette inégalité est impossible si $p^{\bar{\nu}'} > 3$. Si $p^{\bar{\nu}'} = 3$, elle admettrait une solution pour $m_1 = 1$. Mais elle doit être rejetée, car on aurait $p^{\nu_1'} = 3^2$ et ce cas est exclu (**58**).

Si $p^{\bar{\nu}'} = 2$, on aurait les solutions $m_1 = 1$ ou 2. Mais la première doit être rejetée, $p^{\nu_1'}$ devant être > 4.

On aura donc

$$p = 2, \qquad \bar{\nu}' = 2, \qquad \bar{\omega} = 3, \qquad \bar{n} = 2\bar{\nu}\bar{\mu} = 2.3^{\bar{\rho}}$$

et, d'autre part,

$$\nu_1' = 4, \qquad \omega_1 = 2^4 - 1 = 3.5; \qquad n_1 = 2\nu_1'\mu_1 = 8.3^{\rho_1}.5^{\sigma_1}.$$

Donc $\bar{n}$ est impairement pair, et n_1 multiple de 8. Il en serait de même pour n_2 si L_2^0 était aussi de première catégorie et l'on ne pourrait avoir $n_1 + n_2 = \bar{n}$.

107. Il faut donc admettre que L_2^0 est de deuxième catégorie; d'où

$$\nu_2 = 2\nu^{\sim} = (2m_2 - 1)\bar{\nu}', \qquad \omega_2 = p^{(2m_2-1)\bar{\nu}'} + 1,$$

et l'inégalité

$$\bar{\nu}\frac{\omega_2}{\nu_2} \leqq \frac{16}{3}$$

devient

$$p^{(2m_2-1)\bar{\nu}'} + 1 \leqq \frac{16}{3}(2m_2 - 1).$$

D'ailleurs, $p^{\bar{\nu}'}$ étant égal à 2, cette inégalité n'a lieu que si $m_2 < 3$.

L'hypothèse $m_2 = 2$ doit être rejetée, car on aurait $p^{\nu'_2} = 2^3$, cas exclu.

Il faut donc supposer $m_2 = 1$, d'où

$$\nu'_2 = \bar{\nu}' = 1, \qquad \omega_2 = 3, \qquad n_2 = 2\mu_2 = 2.3^{\rho_2},$$

et n_2 sera impairement pair ainsi que n.

Donc n_1, n_2 ne peuvent être égaux et l'un d'eux sera $< \frac{1}{2}\bar{n}$.

Si $n_1 < \frac{1}{2}n$, ω_1 étant divisible par 5, L^0 contiendrait une substitution d'ordre 5 altérant moins de la moitié des variables, ce qui est inadmissible (**74**).

Si $n_2 < \frac{1}{2}\bar{n}$, on aura nécessairement $\mu_2 = 1$. Car s'il en était autrement, L_2^0 contiendrait dans ses seconds faisceaux des substitutions d'ordre 3 n'altérant que $\frac{2n_2}{3}$ variables, nombre inférieur à $\frac{\bar{n}}{3}$, ce qui est également inadmissible.

Donc n_2 sera égal à 2, $\bar{n}$ à 8 et n_1 à 6; mais il doit être multiple de 8, ce qui est contradictoire.

108. Nous sommes donc réduits à supposer que L_1^0 est de deuxième catégorie ainsi que L_2^0.

Nous aurons donc l'inégalité

$$p^{(2m_1-1)\bar{\nu}'} + 1 \leqq \frac{16}{3}(2m_2 - 1)$$

et pour L_1^0 une inégalité analogue où m_1 remplacera m_2.

Soient d'abord $p = 2$, $\bar{\nu}' = 1$. On n'aura aucune solution pour $m_2 > 2$. Pour $m_2 = 2$ on aurait $p^{\nu'_2} = 2^3$, cas exclu. Il faudrait donc supposer $m_1 = m_2 = 1$, d'où

$$\omega_1 = \omega_2 = \bar{\omega} = 3,$$

$$n_1 = 2.3^{\rho_1}, \qquad n_2 = 2.3^{\rho_2}, \qquad \bar{n} = 2.3^{\bar{\rho}},$$

valeurs qui ne peuvent satisfaire à la relation

$$n_1 + n_2 = \bar{n}.$$

Si $p = 2, \bar{\nu}' = 2$, il faudrait supposer $m_1 = m_2 = 1$

$$\omega_1 = \omega_2 = \bar{\omega},$$

$$n_1 = 4.5^{\rho_1}, \qquad n_2 = 4.5^{\rho_2}, \qquad \bar{n} = 4.5^{\bar{\rho}},$$

et l'égalité $n_1 + n_2 = \bar{n}$ serait encore impossible.

L'hypothèse $p = 2$, $\bar{\nu}' = 3$ doit être rejetée, car $\bar{L}^0$ ne serait pas indécomposable (**39**).

Si $p = 2$, $\bar{\nu}' > 3$, l'inégalité n'admet plus de solution.

Supposons enfin p impair. Si $p^{\bar{\nu}'} > 3$, l'inégalité ne sera pas possible même pour $m_2 = 1$. Si $p^{\bar{\nu}'} = 3$, elle le sera seulement pour $m = 1$. On aura dans ce cas

$$\bar{\omega} = \omega_1 = \omega_2 = 4,$$

$\bar{n}$, n_1, n_2 seront des puissances de 2 et l'on aura

$$n_1 = n_2 = \frac{1}{2}\bar{n}.$$

109. Supposons en dernier lieu que $\bar{L}^0$ soit de troisième catégorie.

Le nombre de ses variables sera une puissance de 2. Si donc $n_1 < \frac{1}{2}\bar{n}$, ω_1, ν'_1 seront des puissances de 2 et $\mu_1 = 1$ (**99**). Donc $n_1 = 2\nu'_1\mu_1$ sera aussi une puissance de 2. Mais il est $\geqq \frac{1}{4}\bar{n}$ et $< \frac{1}{2}\bar{n}$. Donc il est égal à $\frac{1}{4}\bar{n}$; et $n_2 = \frac{3}{4}n$ sera divisible par 3. Donc L_2^0 ne pourra être de troisième catégorie, et l'on aura $\omega_2 = p^{\nu'_2} \pm 1$. D'ailleurs $n_2 = 2\nu'_2\mu_2$, et μ_2 n'a pour facteurs premiers que ceux de ω_2. Donc $\omega_2\nu'_2$ sera divisible par 3.

L_1^0 ne pourra non plus être de troisième catégorie. Car il ne contiendrait qu'une seule variable (μ_1 étant égal à 1); L_2^0 en contiendrait 3, nombre impair, ce qui est impossible.

On aura donc

$$n_1 = \nu_1 = 2\nu'_1, \qquad \omega_1 = p^{\nu_1} \pm 1, \qquad \omega_2 = p^{\nu_2} \pm 1,$$

$\omega_1\nu_1$ n'ayant aucun diviseur impair, mais $\omega_2\nu'_2$ étant un contraire divisible par 3.

Enfin $\bar{\nu}$ étant égal à 1 et $\bar{\omega}$ à 2, l'inégalité fondamentale deviendra

$$\frac{p^{\nu_1} \pm 1}{2\nu'_1} \frac{p^{\nu_2} \pm 1}{2\nu'_2} \leqq \frac{32}{3}.$$

Il est impossible de satisfaire à cet ensemble de conditions si $p > 5$.

Si $p = 5$, on aurait la solution

$$\nu'_1 = \nu'_2 = 1, \qquad \omega_1 = 5 - 1, \qquad \omega_2 = 5 + 1,$$

μ_1 étant égal à 1, L_1^0, L_2^0, $\bar{L}^0$ contiendraient respectivement 2, 6 et 8 variables; donc $\mu_2 = 3$.

L'ordre de L_1 serait 8; quant à L_2^0, il contiendrait un second faisceau $h = \begin{pmatrix} 0 & A \\ & B \end{pmatrix}$ d'ordre 3^3 et son groupe auxiliaire à deux variables (mod 3) contiendrait dans son ordre un nouveau facteur 3; donc L_2^0 admettrait un groupe sylovien Λ_2 d'ordre 3^4, dont les substitutions seraient d'ailleurs échangeables aux huit substitutions de L_1^0.

Quant au groupe $\bar{L}^0$ de troisième catégorie à huit variables, nous avons indiqué plus haut (**104**) les valeurs diverses que peut avoir son ordre. Pour certaines d'elles on aura encore un groupe sylovien $\bar{\Lambda}$ d'ordre 3^4. Mais les seules substitutions de $\bar{L}^0$ échangeables à toutes celles de ce groupe sont les deux substitutions de son premier faisceau. Donc $\bar{L}^0$ ne peut contenir (L_1^0, L_2^0). Cette solution est donc à rejeter.

Si $p = 3$, ω_2 étant premier à 3, ν'_2 sera divisible par 3. Mais l'inégalité fondamentale ne serait pas satisfaite s'il était > 3. Il en serait de même si $\nu'_2 = 3$ et $\nu'_1 > 2$. D'ailleurs si ν'_1 était égal à 2 et $\omega_1 = 3^2 + 1$ il aurait un diviseur impair; et l'hypothèse $\omega_1 = 3^2 - 1$ ferait tomber dans un cas exclu (**58**). Il faut donc supposer

$$\nu'_1 = 1, \qquad \omega_1 = 3 + 1 = 4,$$

$$\nu'_2 = 3 \qquad \text{et} \qquad \omega_2 = \begin{matrix} \text{ou} \quad 3^3 - 1 = 26, \\ \text{ou} \quad 3^3 + 1 = 28. \end{matrix}$$

La première hypothèse est à rejeter, car $\bar{L}^0$ ne peut être divisible par 13. La seconde également, quoique $\bar{L}^0$ puisse contenir un groupe

sylovien $\overline{\Lambda}$ formé d'une substitution d'ordre 7; car $\overline{L}^0$ ne contient que deux substitutions échangeables à celle-là, tandis que L_2^0 contient aussi une substitution d'ordre 7, mais échangeable à toutes celles de L_1^0.

110. Supposons en dernier lieu que $\overline{L}^0$ étant toujours de troisième catégorie, on ait $n_1 = n_2 = \frac{1}{2}\overline{n}$, d'où $\overline{n}^2 = 4n_1 n_2$. L'inégalité fondamentale deviendra

$$\frac{\omega_1}{\nu_1}\frac{\omega_2}{\nu_2} \leqq 8.$$

Si L_1^0, L_2^0 sont des deux premières catégories on aura

$$\frac{p^{\nu_1} \pm 1}{2\nu'_1}\,\frac{p^{\nu_2} \pm 1}{2\nu'_2} \leqq 8,$$

ν'_1, ν'_2 n'ayant pas de diviseur impair.

On n'a évidemment aucune solution si $p > 5$.

Si $p = 5$, on aura les solutions

$$\nu'_1 = \nu'_2 = 1 \left\{ \begin{array}{ll} \omega_1 = 5 - 1, & \omega_2 = 5 - 1, \\ \omega_1 = 5 - 1, & \omega_2 = 5 + 1, \end{array} \right.$$

et, si $p = 3$, les solutions

$$\nu'_1 = \nu'_2 = 1, \qquad \omega_1 = \omega_2 = 3 + 1;$$

$$\begin{array}{llll} \nu'_1 = 1, & \nu'_2 = 2, & \omega_1 = 3 + 1, & \omega_2 = 3^2 + 1; \\ \nu'_1 = 2, & \nu'_2 = 2, & \omega_1 = 3^2 + 1, & \omega_2 = 3^2 + 1. \end{array}$$

Si L_2^0 est de troisième catégorie sans que L_1^0 le soit, on aura $\frac{\omega_2}{\nu_2} = 2$ et l'inégalité devient

$$\frac{p^{\nu_1} \pm 1}{2\nu'_1} \leqq 4,$$

ν'_1 n'ayant pas de diviseur impair.

Elle est impossible si $p > 7$.

Si $p = 7$, on a la solution

$$\nu'_1 = 1, \qquad \omega_1 = 7 + 1, \qquad \omega_2 = 2.$$

Si $p = 5$, les solutions

$$\nu'_1 = 1, \qquad \omega_1 = 5 - 1, \qquad \omega_2 = 2;$$
$$\nu'_1 = 1, \qquad \omega_1 = 5 + 1, \qquad \omega_2 = 2.$$

Si $p = 3$, les solutions

$$\nu'_1 = 1, \qquad \omega_1 = 3 + 1, \qquad \omega_2 = 2,$$
$$\nu'_1 = 2, \qquad \omega_1 = 3^2 + 1, \qquad \omega_2 = 2.$$

Enfin si L_1^0 est ainsi que L_2^0 de troisième catégorie, on aura une dernière solution

$$\omega_1 = \omega_2 = 2.$$

111. Notre objet était d'établir que le groupe indécomposable $\overline{L}^0$ ne peut contenir le groupe complexe $L = (L_1, L_2, \ldots)$. Ce but serait déjà atteint si nous n'avions réservé pour une discussion ultérieure certains cas particuliers assez nombreux, mais présentant tous les caractères suivants :

1° Le nombre $\overline{\nu}$ des séries dans $\overline{L}^0$ est égal à 1 ou à 2.

2° Le nombre des variables dans chacune d'elles est une puissance de 2, telle que 2^s.

3° Les groupes partiels L_1^0, L_2^0 sont au nombre de 2; ils contiennent chacun la moitié des variables.

4° Le module p est impair; il ne surpasse pas 7 à moins que L_1^0, L_2^0, $\overline{L}_0$ ne soient tous trois de troisième catégorie, auquel cas il n'est pas déterminé.

L'exposant s est également indéterminé. Mais les considérations suivantes vont nous permettre de le limiter.

112. Soient $\overline{f}$ la substitution génératrice du premier faisceau de $\overline{L}^0$; $\overline{h}$, $\overline{h}'$, ... ses seconds faisceaux.

Leur réunion donnera un groupe

$$\overline{H} = (h, h', \ldots),$$

d'ordre 2^{2s+1} dont les substitutions seront échangeables entre elles aux puissances près de la substitution $\overline{\theta}$ qui multiplie toutes les variables par -1.

Les autres substitutions de $\overline{H}$ seront de deux sortes : les unes, d'ordre 4, multiplient une moitié des variables par j racine de la congruence $j^2 = -1 \pmod p$ et les autres par $-j$; les autres, d'ordre 2, multiplient une moitié des variables par -1 et n'altèrent pas l'autre moitié.

Désignons par $f_1, h_1, h'_1, \ldots, \theta_1$ et par $f_2, h_2, h'_2, \ldots, \theta_2$ les expressions analogues pour les groupes L_1^0, L_2^0.

Le groupe $\overline{H}$ contenant la substitution $\overline{\theta} = \theta_1\theta_2$ contiendra nécessairement les deux substitutions θ_1, θ_2 s'il contient l'une d'elles.

Il contiendra dans tous les cas des substitutions échangeables à θ_1, formant un groupe Λ.

En effet, s'il contient θ_1, toutes les substitutions de $\overline{H}$ lui étant échangeables au signe près, la moitié d'entre elles lui sera échangeable. L'ordre de Λ sera donc 2^{2s}.

S'il ne contient pas θ_1, cette substitution aura pour correspondante, dans le groupe auxiliaire à $2s$ variables (mod 2) qui sert à la construction de $\overline{L}^0$, une substitution $\overline{\tau}$ d'ordre 2 ayant une forme canonique telle que la suivante :

$$[x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, z_1, \ldots \quad x_1 + y_1, y_1, x_2 + y_2, y_2, \ldots, z_1, \ldots].$$

Le nombre s' des variables x, z est au moins égal à s. Or $\overline{\tau}$ est échangeable aux $2^{s'}$ substitutions de la base qui accroissent les x et les z de termes constants sans altérer les y.

A chacune d'elles correspondent dans $\overline{H}$ deux substitutions, T et $T\overline{\theta}$ échangeables à θ_1 au signe près. On a ainsi $2^{s'+1}$ substitutions dont la moitié au moins sera échangeable à θ_1.

L'ordre O du groupe Λ sera donc au moins égal à 2^s.

Mais nous allons, d'autre part, en déterminer une limite supérieure.

115. Les substitutions de L_1^0, étant échangeables à θ_1 et permutables à $\overline{H}$, seront permutables à Λ.

Soit d'ailleurs $\overline{U}$ une des substitutions de Λ. Étant échangeable à θ_1 elle sera le produit de deux substitutions partielles U_1, U_2 opérées respectivement sur les variables de L_1^0 et de L_2^0. Si deux

d'entre elles

$$\overline{U} = U_1 U_2, \qquad \overline{U}' = U_1 U'_2$$

correspondent à la même substitution partielle U_1, Λ contiendra la substitution

$$\overline{U}^{-1}\overline{U}' = U_2^{-1} U'_2,$$

laquelle laisse inaltérées les variables de L_1^0; elle multipliera donc les autres variables par -1 ou les laissera inaltérées.

Si donc $\overline{H}$ ne contient pas les substitutions θ_2, θ_1, on aura $U'_2 = U_2$ et O sera égal à O′ nombre des substitutions U_1. Dans le cas contraire il sera égal à 2O′, U'_2 pouvant être égal à U_2 ou à $\theta_2 U_2$.

Cherchons donc la valeur de O′.

114. Soit S_1 une substitution quelconque de L_1^0; Λ contiendra la substitution

$$S_1^{-1}\overline{U}S_1\overline{U}^{-1} = S_1^{-1}U_1S_1U_1^{-1},$$

laquelle laisse inaltérées les variables de L_2^0; elle se réduira donc à θ_1 ou à l'unité.

Si donc θ_1 n'appartient pas à H, la substitution U_1 devra être échangeable à toutes les substitutions de L_1^0; c'est donc une puissance de f_1. D'ailleurs son ordre doit être un diviseur de 4. Donc si ω_1 est divisible par 4, ce sera l'une des puissances de $f_1^{\frac{\omega_1}{4}}$; et si ω_1 est impairement pair, ce sera l'une des puissances de $f_1^{\frac{\omega_1}{2}}$. Dans le premier cas,

$$2^s\ O' = 4, \qquad \text{d'où} \qquad s = 2,$$

et dans le second cas

$$2^s = O' = 2, \qquad \text{d'où} \qquad s = 1.$$

Supposons au contraire que θ_1 appartienne à H; S pourra transformer U_1 en U_1 ou en $U_1\theta_1$. Celles des substitutions de L_1^0 qui sont échangeables à U_1 formeront un sous-groupe L invariant dans L_1^0 et d'indice 2. Soit h_1 l'un des seconds faisceaux, $2^{2\sigma+1}$ son ordre. Il aura au moins $2^{2\sigma}$ substitutions communes avec L; mais leurs transformées reproduiront toutes celles de h_1. Donc chacune des substitutions U_1 sera échangeable à celles des h_1, h_1, ... Mais

elles ne le sont pas nécessairement à f_1. Si elles ne le sont pas toutes, la moitié le seront et se réduiront comme tout à l'heure à des puissances de $f^{\frac{\omega_1}{4}}$ ou de $f^{\frac{\omega_1}{2}}$.

On aura donc, si ω_1 est multiple de 4,

$$2^{2s} = 2O' \leqq 2.2.4, \qquad \text{d'où} \qquad s \leqq 2,$$

et si ω_1 est impairement pair,

$$2^{2\sigma} = 2O' \leqq 2.2.2, \qquad \text{d'où} \qquad s = 1.$$

115. L'exposant s étant ainsi étroitement limité, il est aisé de déterminer l'ordre des groupes $\overline{L}^0$, L_1^0, L_2^0.

En effet, si les variables de $\overline{L}^0$ forment plusieurs séries (leur nombre $\overline{\nu}$ étant égal à 2), $\overline{L}^0$ contient une substitution P′ ou R′ qui les échange (**52**). Le nombre des substitutions qui les laissent immobiles s'obtiendra en multipliant l'ordre $\overline{\omega}\overline{\mu}^2$ de son noyau par l'ordre O_s d'un groupe auxiliaire à $2s$ variables (mod 2).

Si $s = 1$, on aura $O_1 = 6$.

Si $s = 2$, le groupe auxiliaire pourra présenter deux formes distinctes. Pour l'une d'elles on aura $O_2 = 5.2 = 10$, pour l'autre $O_2 = 2.6.6 = 72$.

L'ordre $\overline{\Omega}$ de $\overline{L}^0$ sera donc

$$\overline{\Omega} = \overline{\nu}\overline{\omega}\overline{\mu}^2 O_s.$$

Toutefois, si $\overline{L}^0$ est de troisième catégorie, le groupe auxiliaire devant être restreint à ses substitutions paires, le nombre ci-dessus devra être réduit de moitié.

Les ordres Ω_1, Ω_2 de L_1^0, L_2^0 se calculeront de même, si μ_1, μ_2 ne sont pas égaux à 1. Si $\mu_1 = 1$, on aura simplement $\Omega_1 = \nu_1\omega_1$.

Remarquons enfin que si L_1^0 et L_2^0 sont semblables, le groupe à comparer à L^0 est le groupe décomposable ζ qu'on obtient par l'adjonction à L_1^0, L_2^0 de la substitution qui les permute; il a pour ordre $2\Omega_1\Omega_2$.

116. Nous pouvons maintenant procéder à la discussion de cas réservés.

I. S'il n'y a pas de forme invariante, on aura deux cas (**105**) :

1°

$$p = 3, \qquad \nu_1 = \nu_2 = \bar{\nu} = 1, \qquad \omega_1 = \omega_2 = \bar{\omega} = 2.$$

Il faut supposer $s = 1$. Le groupe $\mathfrak{L}$ ne contient donc que deux variables. C'est un cas exclu (**56**).

2°

$$p = 5, \qquad \nu_1 = \nu_2 = \bar{\nu}, \qquad \omega_1 = \omega_2 = \bar{\omega} = 4;$$

L_1^0 et L_2^0 semblables.

Si $s = 1$, $\mathfrak{L}$ ne contient que deux variables (mod 5); ce cas est également exclu (**56**).

Si $s = 2$, l'ordre de $\mathfrak{L}$ sera $2.(4.2^2.6)^2$ nombre supérieur à l'ordre $4.4^2 O_2$ de $\bar{L}^0$; $\mathfrak{L}$ ne pourra donc être contenu dans L^0.

II. Il y a une forme invariante; $\bar{L}^0$ est de première ou de deuxième catégorie; L_1^0 et L_2^0 sont semblables et l'on aura deux cas à discuter (**106** et **108**) :

3° ou 4°

$$p = 3 \text{ ou } 5, \qquad \nu_1 = \nu_2 = \bar{\nu} = 2, \qquad \omega_1 = \omega_2 = \bar{\omega} = 4.$$

Si $s = 1$, d'où $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\bar{\mu} = 2$, l'ordre de $\mathfrak{L}$ sera 2.8^2, nombre qui ne divise pas $2.4.2^2.6$, ordre de $\bar{L}^0$.

Si $s = 2$, l'ordre de $\mathfrak{L}$ sera $2(2.4.2^2.6)^2$ et ne divise pas l'ordre de $\bar{L}^0$ égal à $2.4.4^2 O_2$.

III. Il y a une forme invariante, et $\bar{L}^0$ est de troisième catégorie (**110**).

Si $s = 1$, on n'a que deux variables; L_1^0, L_2^0 n'en contiendront qu'une. Ils seront donc de troisième catégorie et la forme invariante sera nécessairement quadratique. C'est un cas d'exclusion signalé (**55**).

Il faut donc supposer $s = 2$. Le nombre des variables sera quatre, dont deux appartiennent à chacun des groupes L_1^0, L_2^0, et parmi toutes les combinaisons possibles on devra rejeter *a priori* toutes celles où l'un des nombres ω_1, ω_2 ne serait pas divisible par 4.

Les seules combinaisons qui restent sont les suivantes :

$p = 5$; L_1^0, L_2^0 semblables et de première catégorie;
$p = 3$; L_1^0, L_2^0 semblables et de deuxième catégorie.

Dans les deux cas on a

$$\nu'_1 = \nu'_2 = 1, \qquad \overline{\nu}' = 1, \qquad \omega_1 = \omega_2 = 4, \qquad \overline{\omega} = 2;$$
$$\mu_1 = \mu_2 = 1, \qquad \overline{\mu} = 4.$$

L'ordre de $\mathfrak{L}$ sera $2[2.4]^2 = 2^7$ et celui de $\overline{L}^0$ sera $2.2^4.\frac{1}{2}O_2$. Pour qu'il soit divisible par 2^7, il faut adopter parmi les deux valeurs de O_2 celle-ci : $2.6.6$. Dans ce cas, $\Omega = 2^7.3^2$ et $\overline{L}^0$ contiendra un groupe sylovien Λ d'ordre 2^7 qui devrait coïncider avec $\mathfrak{L}$.

Mais ces deux groupes, bien qu'ayant le même ordre, diffèrent par la structure. En effet, $\mathfrak{L}$ contient un seul sous-groupe invariant $\mathfrak{L}'$ d'indice 2 formé de la réunion des groupes L_1^0, L_2^0. Λ a de même un sous-groupe invariant Λ' d'indice 2 formé par le noyau de $\overline{L}^0$; $\mathfrak{L}'$ et Λ' devraient coïncider, ce qui ne peut être, car les substitutions d'ordre 4 contenues dans Λ' ne laissent inaltérée aucune fonction des variables, tandis que $\mathfrak{L}'$ contient la substitution f_1 d'ordre 4 qui n'altère pas les variables de L_2^0.

Nous pouvons donc affirmer qu'un groupe décomposable ou complexe, construit avec les précautions indiquées dans la Section II, est maximum.

VIII. — Un groupe indécomposable L^0 ne peut être contenu dans un autre groupe indécomposable $\overline{L}^0$.

117. Il nous reste à chercher à quelles conditions un groupe indécomposable L^0 pourrait être contenu dans un autre groupe indécomposable $\overline{L}^0$.

Soient, comme précédemment,

$$f, \quad h = \begin{pmatrix} \theta, & A_1 \ldots A_\sigma \\ & B_1 \ldots B_\sigma \end{pmatrix}, \quad h', \quad \ldots$$

le noyau de L^0,

$$f, \quad \overline{h}, \quad h', \quad \ldots$$

celui de $\overline{L}^0$.

Nous établirons successivement :

1° Que $\overline{f}$ est échangeable à toutes les substitutions du noyau de L^0, et par suite sera une puissance de f;

2° Que $\overline{f}$ et f coïncident;

3° Que L^0 et $\overline{L}^0$ ont le même noyau;

4° Et enfin qu'ils coïncident.

118. Comme dans la section précédente, nous nous appuierons sur ce que S, T étant deux substitutions quelconques de L^0, $S^{-1}\overline{f}S$, $T^{-1}\overline{f}T$ seront des puissances de $\overline{f}$ et le commutant $S^{-1}T^{-1}ST$ sera échangeable à $\overline{f}$.

Prenons pour S la substitution A_1 et pour T une substitution de L^0 qui ne lui soit pas échangeable aux puissances près de θ; le commutant $A_1^{-1}T^{-1}A_1T$ et ses transformées combinées ensemble reproduisent tout le faisceau h, et $\overline{f}$ sera échangeable à toutes ses substitutions. De même à celles des autres faisceaux h', ...

D'autre part, si dans L^0 le nombre des séries conjuguées est supérieur à 2, L^0 contiendra une substitution de la forme P^2Q dont le commutant avec f est f^{p^2-1}.

Si L^0 est de première catégorie, il contiendra une substitution de la forme RQ ou de la forme RPQ. Leurs commutants avec f seront respectivement f^{p+1} ou f^2.

Nous allons en conclure que $\overline{f}$ multiplie chaque variable de f par un facteur constant et par suite est échangeable à f.

119. *Premier cas.* — S'il n'y a pas de forme invariante, f sera d'ordre $p^\nu - 1$, et f^{p^2-1} multipliera les variables des séries ρ et $r+\rho$ respectivement par

$$i^{(p^2-1)p^2}, \qquad i^{(p^2-1)p^{r+\rho}}, \qquad [i^{p^r-1} \equiv 1 \pmod{p}].$$

Ces facteurs seront différents, à moins qu'on n'ait

$$(1) \qquad (p^2-1)(p^r-1) \equiv 0 \pmod{p^\nu - 1}.$$

Si donc r ne peut être choisi de manière à satisfaire à cette relation, $\overline{f}$ devra remplacer chaque variable par une fonction des seules variables de la même série. Étant d'ailleurs échangeable à A_1, ...

qui multiplient ces variables par des facteurs différents, elle multipliera chacune d'elles par un facteur constant.

Or la relation (1) est impossible si $\nu > 2$; car si $r < \nu - 1$, son premier membre est $< p^\nu - 1$, et si $r = \nu - 1$, sa division algébrique par $p^\nu - 1$ donnera un reste $-p^{\nu-1} - p^2 + p + 1$ négatif et moindre en valeur absolue que $p^\nu - 1$.

Nous réserverons le cas où $\nu = 2$ pour une discussion ultérieure.

120. *Deuxième cas.* — Si L^0 est de première catégorie, on obtiendra le même résultat si celle des substitutions f^{p+1}, f^2 à laquelle $\overline{f}$ est échangeable multiplie les variables des diverses séries par des facteurs tous différents.

Cela aura lieu pour la substitution f^{p+1}, à moins qu'on n'ait par la comparaison de deux séries conjuguées, pour une valeur de r positive et moindre que ν',

$$(2) \qquad (p+1)(p^r - 1) \equiv 0 \pmod{p^{\nu'} - 1},$$

ou par la comparaison d'une série avec son associée ou les conjuguées de celles-ci, pour une valeur de r non négative et $< \nu'$,

$$(3) \qquad (p+1)(p^r + 1) \equiv 0 \pmod{p^{\nu'} - 1}.$$

La première condition est impossible, sauf pour $\nu' = 2$, cas que nous réserverons.

La seconde donnera, si $r = \nu' - 1$,

$$p^{\nu'-1} + p + 2 \equiv 0 \pmod{p^{\nu'} - 1}.$$

Or le premier membre est moindre que $p^{\nu'} - 1$: 1° si $\nu' > 3$; 2° si $\nu' = 3$, $p > 2$; 3° si $\nu' = 2$, $p > 3$.

Or pour $\nu' = 3$, $p = 2$ la congruence n'est pas satisfaite; d'autre part, $p^{\nu'} > 4$ et ne doit pas être égal à 3^2, ce cas étant exclu (**58**).

Il faut donc supposer $\nu' = 1$, d'où

$$p + 3 \equiv 0 \pmod{p - 1} \qquad \text{et} \qquad p = 5.$$

Mais le cas où $p^\nu = 5$ est exclu, si $\tau + \Sigma u$ est pair (**45**); et si $\tau + \Sigma u$ est impair, L^0 contiendra deux substitutions R', S telles que leur commutant $S^{-1}R'SR'^{-1}$ soit une puissance impaire de f (**59**).

Ce commutant f^2 sera échangeable à $\overline{f}$ et, comme il multiplie

les deux séries par des facteurs différents, notre proposition sera démontrée.

Soit maintenant $r < \nu' - 1$. Le premier membre de la congruence (3) est évidemment $< p^{\nu'} - 1$, si $p > 2$ ou si $\nu' > 4$. Pour $p^{\nu'} = 2^3$, il n'est pas divisible par $2^3 - 1$. Mais pour $p^{\nu'} = 2^4$ on aura la solution $r = 2$, $p^{\nu'} = 2^4$.

Nous réserverons encore l'examen de ce cas.

Si $\overline{f}$ est échangeable à f^2, elle le sera *a fortiori* à f^{p+1}, si p est impair. Le seul cas nouveau est donc celui où $p = 2$. Il donne la congruence

$$2(2^r + 1) \equiv 0 \qquad (\text{mod } 2^{\nu'} - 1)$$

et $2^{\nu'} - 1$ étant impair

$$2^r + 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod } 2^{\nu'} - 1),$$

évidemment impossible puisque $\nu' \geqq 3$.

121. *Troisième cas.* — Si L^0 est de deuxième catégorie, les séries conjuguées seront en nombre pair $2\nu'$, et f multipliera les variables de la $(\rho + 1)^{\text{ième}}$ série par $i^{(p^{\nu'}-1)p^2}$, où $i^{p^{2\nu'}-1} \equiv 1$ (mod p).

Pour que la substitution f^{p^2-1} à laquelle $\overline{f}$ est échangeable multiplie par le même facteur deux séries différentes ρ et $\rho + r$, il faudra qu'on ait

$$(p^2 - 1)(p^r - 1) \equiv 0 \qquad (\text{mod } p^{\nu'} + 1),$$

pour une valeur de r positive et moindre que $2\nu'$.

Si $r < \nu' - 1$, le premier membre étant $< p^{\nu'}$, cette congruence est impossible.

Si $r = \nu' - 1$, la division algébrique montre que

$$-p - p^{\nu'-1} - p^2 + 1$$

devrait être divisible par $p^{\nu'} + 1$. Or il lui est inférieur en valeur absolue si $\nu' > 3$. De même si $\nu' = 3$ et $p > 2$. D'ailleurs $\nu' = 3$ et $p = 2$ rentrerait dans un cas exclu (**59**).

Si $\nu' = 2$, $p^2 + 1$ devrait diviser $-2p - p^2 + 1$ et par suite $-2p + 2$, ce qui est évidemment impossible.

Supposons enfin $r = \nu'$. En le changeant en $\nu' + r$, nous aurons la

nouvelle congruence

$$(p^2-1)(p^r+1) \equiv 0 \pmod{p^{\nu'}+1},$$

où r peut prendre les valeurs $0, 1, \ldots, \nu'-1$.

Cette congruence est impossible si $r < \nu'-2$, car on aura

$$(p^2-1)(p^r+1) < p^{r+2}+p^2 < 2p^{r+2} < p^{r+3} < p^{\nu'}.$$

Si $r = \nu'-2$, on aura

$$(p^2-1)(p^{\nu'-2}+1) \equiv -p^{\nu'-2}-2+p^2,$$

expression moindre en valeur absolue que $p^{\nu'}+1$. Il faudrait donc qu'elle s'annulât, ce qui n'a lieu que si $\nu'=3$, $p=2$. Mais ce cas est exclu (**59**).

Soit enfin $r = \nu'-1$:

$$\begin{aligned}(p^2-1)(p^{\nu'-1}+1) &= p^{\nu'+1}-p^{\nu'-1}+p^2-1\\ &\equiv -p^{\nu'-1}-p-1+p^2 \bmod p^{\nu'}+1.\end{aligned}$$

Cette dernière expression est négative et moindre en valeur absolue que $p^{\nu'}+1$, si $\nu'>2$. Si $\nu'=2$, elle se réduit à

$$p^2-2p-1 \equiv -2(p-1),$$

expression qui ne peut être divisible par p^2+1.

Reste la seule hypothèse $\nu'=1$, dont l'examen sera réservé.

122. Les cas réservés dont nous allons entreprendre la discussion offrent ce caractère commun qu'il ne peut exister plus de deux variables x, x' qui soient multipliées par un même facteur dans chacune des substitutions monomes $A_1, \ldots,$ et f^{p^2-1} (ou f^{p+1}) auxquelles nous savons déjà que $\overline{f}$ doit être échangeable; donc $\overline{f}$ sera de la forme

$$\overline{f} = [x, x', \ldots \quad lx+mx', m'x+l'x', \ldots].$$

Il nous faut établir que $m=m'\equiv 0 \pmod p$.

Nous y arriverons en exprimant que la transformée $\varphi = f^{-1}\overline{f}f$, étant une puissance de f, lui est échangeable.

Soit en effet

$$f = |x, x', \ldots \quad ax, a'x', \ldots|.$$

On aura

$$\varphi = |x, x', \ldots \quad lx + a^{-1}a'mx', aa'^{-1}m'x + l'x', \ldots|.$$

L'identification de $\overline{f}\varphi$ et de $\varphi\overline{f}$ donnera les relations

$$\left.\begin{array}{r} l^2 + aa'^{-1}mm' \equiv l^2 + a^{-1}a'mm' \\ a^{-1}a'lm + ml' \equiv lm + a^{-1}a'ml' \\ lm' + aa'^{-1}l'm' \equiv aa'^{-1}lm' + l'm' \\ a^{-1}a'mm' + l'^2 \equiv aa'^{-1}mm' + l'^2 \end{array}\right\} \pmod{p},$$

ou en simplifiant

$$\left.\begin{array}{l} [(a^{-1}a')^2 - 1]mm' \equiv 0 \\ (a' - a)m(l' - l) \equiv 0 \\ (a' - a)m'(l' - l) \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{p}.$$

Si $(a^{-1}a')^2$ n'est pas congru à 1, l'un au moins des nombres m, m' sera nul; l'autre aussi, car dans l'hypothèse contraire on aurait $l' \equiv l$ et l'ordre de $\overline{f}$ serait divisible par p, ce qui est impossible.

Reste à discuter la possibilité de l'hypothèse $(a^{-1}a')^2 \equiv 1$.

125. Dans les deux premiers cas réservés, x, x' appartiennent à des séries conjuguées; a et a' sont respectivement égaux à i et à i^p, i étant racine primitive de la congruence

$$i^{p^2-1} \equiv 1 \qquad (\text{mod } p).$$

On devrait donc avoir

$$i^{2(p-1)} \equiv 1 \qquad (\text{mod } p),$$

d'où

$$2(p-1) \equiv 0 \qquad (\text{mod } p^2 - 1),$$

congruence évidemment impossible.

Dans le troisième cas, L^0 est de première catégorie, $p^r = 2^\lambda$; x, x', ne sont pas conjugués et $r = 2$. On aura donc

$$a^{2^\lambda - 1} \equiv 1 \qquad \text{et} \qquad a' = a^{-2^\lambda},$$

d'où

$$(a^{-1}a')^2 = a^{-10}, \qquad -10 \equiv 0 \pmod{2^5 - 1}.$$

ce qui n'a pas lieu.

Dans le quatrième et dernier cas, L^0 est de deuxième catégorie, et $\nu' = 1$. On aura donc

$$a^{p+1} \equiv 1 \pmod{p}, \qquad a' = a^p,$$
$$(a^{-1}a')^2 = a^{2(p-1)},$$

d'où

$$2(p-1) \equiv 0 \pmod{p+1},$$
$$-4 \equiv 0 \pmod{p+1}.$$

Cette congruence admet la seule solution $p = 3$.

D'ailleurs on tombera sur un cas exclu si $\tau + \Sigma u$ est impair (**44**): et s'il est pair, L^0 contiendra deux substitutions P', S telles que le commutant $S^{-1}P'SP'^{-1}$ soit une puissance impaire de f, telle que f^2 (**39**). f étant d'ordre 4 sera réciproquement une puissance de f^2 et sera échangeable à $\overline{f}$.

Il est donc prouvé que dans tous les cas $\overline{f}$ est échangeable à toutes les substitutions du noyau de L^0.

124. Corollaire I. — *$\overline{f}$ sera une puissance de f.*

En effet, soit i l'imaginaire que les variables contiennent dans leur expression. Les facteurs par lesquels $\overline{f}$ multiplie ces variables seront nécessairement des puissances de i et les variables conjuguées seront multipliées par des puissances conjuguées. Enfin, dans le cas des groupes de seconde catégorie où $\nu = 2\nu'$, ces multiplicateurs seront des puissances de $i^{p^{\nu'}-1}$, cette condition étant nécessaire pour que $\overline{f}$ n'altère pas la forme invariante.

125. Corollaire II. — *$\overline{\nu}$ divise ν.*

Nous venons en effet de voir que $\overline{\omega}$ divise ω.

Or s'il n'y a pas de forme invariante,

$$\omega = p^{\overline{\nu}} - 1.$$

Si L^0 est de première catégorie,

$$\bar{\nu} = 2\bar{\nu}', \qquad \bar{\omega} = p^{\bar{\nu}'} - 1 \qquad (p^{\bar{\nu}'} > 1);$$

S'il est de deuxième catégorie,

$$\bar{\nu} = 2\bar{\nu}', \qquad \bar{\omega} = p^{\bar{\nu}'} + 1;$$

S'il est de troisième catégorie,

$$\bar{\nu} = 1, \qquad \bar{\omega} = 2.$$

On aura de même, suivant les cas,

$$\omega = p^{\nu} - 1, \; p^{\nu'} - 1, \; p^{\nu'} + 1, \; 2.$$

Mais, pour que ω soit divisible par ω, il faut qu'on ait :

Si $\bar{\omega} = p^{\bar{\nu}} - 1$,

$$\omega = p^{m\bar{\nu}} - 1, \qquad \nu = m\bar{\nu};$$

Si $\bar{\omega} = p^{\bar{\nu}'} - 1$,

$$\omega = p^{m\bar{\nu}'} - 1, \qquad \nu' = m\bar{\nu}', \qquad \nu = m\bar{\nu};$$

Si $\bar{\omega} = p^{\bar{\nu}'} + 1$,

$$\omega = p^{2m\bar{\nu}'} - 1, \qquad \nu' = 2m\bar{\nu}', \qquad \nu = 2m\bar{\nu},$$

ou

$$\omega = p^{(2m-1)\bar{\nu}'} + 1, \qquad \nu' = (2m-1)\bar{\nu}', \qquad \nu = (2m-1)\bar{\nu}.$$

Enfin si $\bar{\omega} = 2$, $\bar{\nu} = 1$ et divise ν.

126. Théorème II. — *Les $\omega\mu^2$ substitutions du noyau de L^0 sont échangeables entre elles aux puissances près de $\bar{f}$.*

Elles le sont, en effet, aux puissances près des substitutions

$$g = f^{\frac{\omega}{\pi}}, \qquad g' = f^{\frac{\omega}{\pi'}}, \qquad \ldots$$

$\pi, \pi', \ldots$ étant les facteurs premiers de μ. Or

$$\mu\nu = \bar{\mu}\bar{\nu},$$

ces deux expressions représentant le nombre n des variables;

$\bar{\nu}$ divisant ν, μ et par suite π divisera $\bar{\mu}$. Donc π divise aussi $\bar{\omega}$. Donc $\bar{f}^{\frac{\bar{\omega}}{\pi}}$ sera une puissance de $\bar{f}$, qui lui-même est puissance de f. Mais elle est d'ordre π comme θ, et celles des puissances de f qui sont d'ordre π sont des puissances les unes des autres. Donc θ est une puissance de $\bar{f}$.

Or l'ordre d'un groupe contenu dans $\bar{L}^0$ et dont les substitutions sont échangeables aux puissances près de $\bar{f}$ ne peut surpasser $\bar{\omega}\bar{\mu}^2$. Il ne peut même atteindre ce chiffre que s'il contient des substitutions de chacun des faisceaux $\bar{h}$, $\bar{h}'$, ... (**91**).

Nous avons donc l'inégalité

$$\omega\mu^2 \leqq \bar{\omega}\bar{\mu}^2,$$

qui nous permettra d'établir la proposition suivante.

127. Théorème III. — *Les premiers faisceaux des groupes* L^0 et $\bar{L}^0$ *sont identiques.*

1° En effet, supposons d'abord qu'il n'y ait pas de forme invariante. On aura

$$\omega = p^{m\bar{\nu}} - 1, \qquad \bar{\omega} = p^{\bar{\nu}} - 1, \qquad \bar{\mu} = m\mu.$$

L'inégalité devient donc

$$p^{m\bar{\nu}} - 1 \leqq (p^{\bar{\nu}} - 1)m^2.$$

Si m était égal à 1, le théorème serait démontré. Si d'ailleurs on remarque que $p^{\nu} > 2$, on n'aura pour solution où m soit > 1 que celle-ci :

$$p^{\bar{\nu}} = 3, \qquad m = 2.$$

Mais le groupe L^0 qu'elle donnerait est exclu (**41**).

2° Si $\bar{L}^0$ est de première catégorie il en sera de même pour L^0, et l'inégalité sera la même, sauf le changement de $\bar{\nu}$ en $\bar{\nu}'$. D'ailleurs $p^{\bar{\nu}} > 4$. Il n'existe donc aucune solution où m soit > 1.

3° Si $\bar{L}^0$ est de deuxième catégorie et L^0 de première, on aura

$$\bar{\mu} = 2m\mu, \qquad \bar{\omega} = p^{\bar{\nu}'} + 1, \qquad \omega = p^{2m\bar{\nu}'} - 1,$$

d'où

$$p^{2m\bar{\nu}'} - 1 \leqq (p^{\bar{\nu}'} + 1)4m^2.$$

D'ailleurs $\overline{\mu}$ étant pair, $p^{\overline{\nu}}+1$, qu'il divise, le sera. Donc p est impair. L'inégalité admet les solutions

$$p^{\overline{\nu}}=3, \qquad m=1.$$
$$p^{\overline{\nu}}=5, \qquad m=1.$$

Mais ces deux cas sont exclus (**38** et **42**).

4° Si $\overline{L}^0$ est de deuxième catégorie, ainsi que L^0, on aura l'inégalité

$$p^{(2m-1)\overline{\nu}'}+1 \equiv (p^{\overline{\nu}'}+1)(2m-1)^2.$$

Pour $m=1$, le théorème serait démontré. On aurait une autre solution pour $p=2$,

$$m=2, \qquad \overline{\nu}'=1, \qquad \text{d'où} \qquad p^{\overline{\nu}}=2^3.$$

Mais ce cas est exclu (**39**).

5° Si $\overline{L}^0$ est de troisième catégorie, on aura

$$\overline{\omega}=2, \qquad \overline{\nu}=1,$$

d'où, si L^0 est de première ou de deuxième catégorie, $\nu=2\nu'$

$$p^{\nu'}-1 \equiv 8\nu'^2 \qquad \text{ou} \qquad p^{\nu'}+1 \equiv 8\nu'^2.$$

D'ailleurs p est impair et ν' puissance de 2. Sous le bénéfice de ces observations, on aura les solutions

$$p^{\nu'}=3,\ 3^2,\ 3^4,\ 5,\ 5^2,\ 7.$$

dont nous réserverons la discussion. D'ailleurs la solution $p^{\nu'}=3$ n'existera pas si L^0 est de première catégorie, car $p^{\nu'}$ doit être >4.

6° Enfin, si $\overline{L}^0$ et L^0 sont de troisième catégorie, le théorème est vérifié.

128. Théorème. — *L^0 sera identique à $\overline{L}^0$.*

Remarquons tout d'abord que les substitutions de L^0 sont permutables à chacun des seconds faisceaux $\overline{h}$, $\overline{h}'$. .... Mais il pourrait arriver qu'elles fussent permutables à un sous-groupe $\overline{h}_1$ de $\overline{h}$.

Lemme. — *Celles des substitutions de $\overline{h}_1$, qui sont échangeables à toutes les autres, sont les puissances de $\overline{\theta} = \overline{f}^{\frac{\overline{\omega}}{\pi}}$.*

Car dans le cas contraire ces substitutions jointes à f donneraient un faisceau abélien permutable aux substitutions de L^0 et dont les substitutions ne seraient pas puissances d'une seule d'entre elles : L^0 ne serait donc pas indécomposable, contrairement à notre supposition.

$\overline{h}_1$ sera donc d'ordre π^{2s_1+1} et sera dérivé de $2s_1$ substitutions génératrices qu'on pourra prendre pour

$$A_1, \quad \ldots, \quad A_s,$$
$$B_1, \quad \ldots, \quad B_s.$$

Les substitutions de $\overline{h}$ échangeables à toutes celles de $\overline{h}_1$ formeront un sous-groupe complémentaire k d'ordre $\pi^{2(\sigma-s_1)+1}$ et dérivé de $2(\sigma-s_1)$ génératrices.

Soient donc $\overline{h}_1$ un sous-groupe minimum parmi ceux de $\overline{h}$ qui sont permutables aux substitutions de L^0 et ne se réduisent pas aux puissances de $\overline{f}$); $\overline{h}_2$ un groupe minimum parmi les sous-groupes de k qui jouissent de cette propriété, etc. $\overline{h}$ sera un produit de sous-groupes $\overline{h}_1, \overline{h}_2, \ldots$ d'ordres $2s_1+1$, $2s_2+1$, ... ayant en commun les puissances de $\overline{\theta}$.

On pourra, s'il y a lieu, décomposer de même chacun des faisceaux $\overline{h}'$, ... en un produit de groupes partiels.

129. Cela posé, L^0 sera contenu dans un groupe L'^0 ayant pour seconds faisceaux $\overline{h}_1, \overline{h}_2, \ldots, \overline{h}_1, \ldots$.

Ces seconds faisceaux seront d'ailleurs identiques à $h, h', \ldots$. Il résulte en effet du théorème du n° **91** que chacun d'eux doit contenir quelque substitution du noyau de L^0 autre que les puissances de f.

Supposons donc que $\overline{h}_1$ renferme une substitution $f^\lambda tt', \ldots$, où t appartienne à h, t' à $h', \ldots$. Il contiendra ses transformées par les substitutions de L^0. Or, parmi celles-ci, il en existe une échangeable à $f, t', \ldots$ et transformant t en une autre substitution t_1

du groupe h qui ne soit pas de la forme $f^{\alpha}t$: donc h_1 contiendra la substitution $t_1 t^{-1}$ et ses transformées par les substitutions de L^0. Or celles-ci, par leur combinaison, reproduisent tout le faisceau h.

Or, par construction, il ne contient aucun sous-groupe permutable aux substitutions de L^0. Donc h contient réciproquement toutes les substitutions de $\overline{h}_1$ et se confond avec lui.

150. Cela posé, $\overline{L}^0$ se construit à l'aide de groupes auxiliaires primaires dont l'un $\overline{\Lambda}$ correspond au second faisceau $\overline{h} = (h_1, h_2, \ldots)$ et L^0 à l'aide de groupes primaires analogues. Ceux de ces groupes $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ qui correspondent aux faisceaux $h_1, h_2, \ldots$ formeraient par leur réunion un groupe complexe qui devrait être contenu dans Λ. Or cela est impossible, d'après la Section VII.

L'hypothèse de la décomposition de $\overline{h}$ en un produit de plusieurs groupes différents $h_1, h_2, \ldots$ est donc inacceptable, et il faut admettre qu'on ait $\overline{h} = \overline{h}_1 = h$ et que Λ_1, groupe primaire, soit contenu dans $\overline{\Lambda}$. Le nombre des variables dans ces groupes étant moindre que dans L^0, on peut admettre comme démontrée l'identité de Λ_1 et de $\overline{\Lambda}$. Dès lors, les groupes $\overline{L}^0$ et L^0 ayant mêmes premier et second faisceaux, et étant construits avec les mêmes groupes auxiliaires, seront identiques.

151. Nous avons réservé (**127**) l'examen de quelques groupes L^0 de première et deuxième catégorie pour lesquels p^{ν} a l'une des valeurs suivantes

$$3, \quad 3^2, \quad 3^3, \quad 5, \quad 5^2, \quad 7.$$

Notre longue discussion sera terminée, si nous établissons que, sauf les cas d'exclusion signalés, aucun de ces groupes ne peut être contenu dans un groupe $\overline{L}^0$, de troisième catégorie.

S'il existait plusieurs groupes de l'espèce L^0 contenant L^0, nous choisirions pour la démonstration l'un de ceux où le nombre des seconds faisceaux $h, h', \ldots$ est le plus grand possible.

Le nombre des variables de L^0 est une puissance de 2: et le nombre $2\nu'$ des séries qu'elles forment sera, suivant le cas, 2, 4, ou 8. Désignons-le par 2^{δ}.

Si L^0 est de première catégorie et $\nu' > 1$, L^0 contiendra (**52**)

les substitutions

$$R', \quad P'$$

et les substitutions $R'^{\alpha}P'^{\beta}f^{\gamma}$ formeront un sous-groupe Γ dont nous désignerons d'une manière générale les substitutions par la lettre U.

Les substitutions qui ne déplacent pas les séries sont des formes T, T', ... définies au n° **26**. Elles sont permutables à Γ. Les puissances de f sont communes à ces diverses formes et à la forme U.

Si, L^0 étant encore de première catégorie, $\nu' = 1$, on n'aura pas de substitution P' et les substitutions de Γ seront de la forme

$$U = R'^{\alpha}f^{\gamma}.$$

Si L^0 est de deuxième catégorie, R' manquera et Γ sera formé des substitutions

$$U = P'^{\beta}f^{\gamma}.$$

Dans tous les cas, les substitutions de L^0 auront pour forme générale

$$UTT'\ldots.$$

132. Cela posé, soit $\bar{h}$ l'un des seconds faisceaux de $\bar{L}^0$. Les substitutions communes à $\bar{h}$ et à L^0 formeront dans L^0 un sous-groupe invariant.

Si l'une d'elles V n'appartient pas à U, $\bar{h}$ coïncidera avec un second faisceau h de L^0.

Soit en effet

$$V = UTT'\ldots,$$

l'un au moins des facteurs T, T', ..., par exemple T, ne se réduisant pas à une puissance de f. Si T n'appartient pas à h, on pourra déterminer dans h une substitution S qui ne lui soit pas échangeable aux puissances près de f; et le commutant

$$S^{-1}TST^{-1}$$

serait commun à h et à $\bar{h}$. Il en serait de même de ses transformées, dont la combinaison reproduit h.

Donc $\bar{h}$ contient h et résulte de la combinaison de h avec un

autre groupe partiel h_1, formé par celles de ses substitutions qui sont échangeables à toutes celles de h.

D'ailleurs les substitutions de L^0, étant permutables à $\bar{h}$ et à h, le seront évidemment à h_1. Donc L^0 serait contenu dans un groupe L'^0 analogue à $\bar{L}^0$, mais où le second faisceau $\bar{h}$ serait dédoublé, ce qui est contraire à la définition de $\bar{L}^0$.

Désignons donc par K l'ensemble des seconds faisceaux communs à L^0 et à $\bar{L}^0$; par H et $\bar{H}$ celui des seconds faisceaux respectivement spéciaux à L^0 et à $\bar{L}^0$. Soit $2r$ le nombre des génératrices de H; celui des génératrices de $\bar{H}$ sera évidemment $2(r+\rho)$.

Soient enfin Λ, $\bar{\Lambda}$ les groupes formés par celles des substitutions de L^0 et de $\bar{L}^0$ qui sont échangeables à toutes celles de K. Si L^0 était contenu dans $\bar{L}^0$, Λ le serait dans $\bar{\Lambda}$. Il nous faut démontrer que cela est impossible.

133. A cet effet, considérons parmi les substitutions U un groupe Γ_1, formé comme il suit :

Si les U sont de la forme

$$R'^{\alpha} P'^{\beta} f^{\gamma},$$

Γ_1 aura pour génératrices

$$R', \quad P'^{\frac{\gamma'}{2}},$$

auxquelles on joindra $f^{\frac{\omega}{4}}$ si ω est divisible par 4, ou $f^{\frac{\omega}{2}}$ si ω est impairement pair.

L'ordre de ce groupe sera 2^{t+1} où $t=3$, si ω est divisible par 4; $t=2$ dans le cas contraire.

Si les U se réduisent à la forme plus simple

$$R'^{\alpha} f^{\gamma},$$

Γ_1 aura pour génératrices

$$R' \quad \text{et} \quad f^{\frac{\omega}{4}} \quad \left(\text{ou } f^{\frac{\omega}{2}}\right),$$

et son ordre sera 2^{t+1} où $t=2$ (ou 1 si ω n'est pas divisible par 4).

Si les U sont de la forme

$$P'^{\beta} f^{\gamma},$$

Γ_1 aura pour génératrices

$$P^{\nu'} \quad \text{et} \quad f^{\frac{\omega}{2}} \quad \left(\text{ou } f^{\frac{\omega}{2}}\right),$$

et son ordre sera 2^{t+1}, où $t = 2$ (ou 1).

En adjoignant à Γ_1 les $2r$ substitutions génératrices de H, on obtiendra un groupe binaire (¹) (Γ_1, H) d'ordre 2^{2r+t+1} contenu dans Λ et *a fortiori* dans $\overline{\Lambda}$. Si cet ordre est supérieur à $2^{r+\rho+1}$, ce groupe aura au moins

$$2^{2r+t-1-(r-\rho)} = 2^{r+t-\rho+1},$$

substitutions communes avec $\overline{H}$ (**95**).

Mais ces substitutions communes, étant de la forme U, devront appartenir à Γ_1. Elles forment d'ailleurs un groupe permutable aux substitutions de L^0 et en particulier à f. Enfin leur ordre divise 4. Donc si U_1 est l'une d'elles, son commutant avec f_1 qui est une puissance de f_1, élevé à la quatrième puissance, donnera l'unité.

Soit donc $2^{t'+1}$ l'ordre du groupe Γ_2 formé par celles des substitutions de Γ_1 qui satisfont à cette condition : on aura

$$2^{r+t-\rho+1} = 2^{t'+1},$$

d'où

$$r \geqq \rho - (t - t').$$

154. Il est d'ailleurs aisé de déterminer $t - t'$.

Si les substitutions de Γ_1 sont de la forme

$$R^{\alpha} P^{\frac{\nu'}{2}\beta} f^{\gamma} \qquad [\text{où } \gamma = 0 \pmod{\omega}],$$

leur commutant avec f sera

$$f^{(-1)^{\alpha} p^{\frac{\nu'}{2}\beta} - 1},$$

et les substitutions de Γ_2 devront satisfaire à la condition

$$(1) \qquad \left[(-1)^{\alpha} p^{\frac{\nu'}{2}\beta} - 1\right] = 0 \qquad (\text{mod } p^{\nu'} - 1).$$

Si elles sont de la forme

$$R^{\alpha} f^{\gamma} \qquad [\text{où } \gamma = 0 \pmod{\omega}],$$

(¹) Voir au n° 93 la définition de ce terme.

la condition sera

$$(2) \qquad 4[(-1)^{\alpha}-1] \equiv 0 \qquad (\text{mod } p^{\nu}-1).$$

Enfin si elles sont de la forme

$$P^{\nu\gamma\beta} f^{\gamma} \qquad [\text{où } 4\gamma \equiv 0 \ (\text{mod } \omega)],$$

la condition sera

$$(3) \qquad 4(p^{\nu\beta}-1) \equiv 0 \qquad (\text{mod } \omega).$$

153. Nous sommes maintenant en mesure d'étudier successivement les divers cas réservés.

I. Soit $p = 3$, $\omega = 3^4 - 1 = 80$. On aura $t = 3$.

La relation (1) se réduit à

$$4[(-1)^{\alpha} 3^{2\beta} - 1) \equiv 0 \qquad (\text{mod } 80),$$

et n'a d'autre solution que $\alpha = \beta = 0$. D'ailleurs γ est susceptible de 4 valeurs. Donc.

$$t' = 1, \qquad t - t' = 2, \qquad r = 1.$$

Si $r = 1$, H contient un seul couple de substitutions A, B. Elles auront pour caractère 1, car autrement on tomberait dans un cas d'exclusion (**10**). Donc A contiendra une substitution S d'ordre 3 qui permute circulairement A, B, AB. Elle sera échangeable à la substitution f d'ordre $3^4 - 1 = 80$ que A contient également.
Donc A contient Sf d'ordre 240.

Or $\overline{A}$ ne peut contenir aucune substitution de cet ordre.

En effet, son noyau $\overline{H}$ étant dérivé de 4 couples de substitutions

$$\begin{matrix} A_1, & \ldots, & A_4, \\ B_1, & \ldots, & B_4, \end{matrix}$$

aux substitutions de $\overline{A}$ correspondront les substitutions paires d'un groupe auxiliaire $\mathfrak{G}$ à 8 variables (mod 2) : et les substitutions de $\overline{H}$ ayant toutes pour ordre un diviseur de 4, il faudrait que $\mathfrak{G}$ contînt une substitution dont l'ordre fût divisible par $\frac{240}{4} = 60$. L'ordre de $\mathfrak{G}$ serait donc divisible par 3 et par 5. Cela ne peut avoir lieu que si $\mathfrak{G}$ est complexe et produit de deux groupes

partiels $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ à 4 variables, le premier indécomposable d'ordre $(2^2+1).4$, le second décomposable et d'ordre $2.[2.3]^2$.

Toute substitution de $\mathfrak{L}$ est le produit de deux autres $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$ échangeables entre elles et appartenant respectivement à $\mathfrak{L}_1$ et à $\mathfrak{L}_2$. Mais $\mathfrak{L}_1$ ne contient aucune substitution d'ordre >5, il faudrait donc supposer que $\mathfrak{T}_1$ est d'ordre 5 et par suite $\mathfrak{T}_2$ d'ordre divisible par 12. Mais on voit aisément que $\mathfrak{L}_2$ ne contient aucune substitution de cet ordre.

Si $r=0$, Λ contiendra la substitution f d'ordre 80. Mais $\overline{\Lambda}$ ne pourra la contenir; car sa construction demandera l'emploi d'un groupe auxiliaire $\mathfrak{L}$ produit de deux groupes partiels; l'un $\mathfrak{L}_1$ à 4 variables (mod 2) et d'ordre $(2^2+1)4$, l'autre $\mathfrak{L}_2$ à 2 variables et d'ordre 2.3. La substitution de $\mathfrak{L}$ correspondant à f devrait avoir son ordre divisible par $\frac{80}{4}=20$ et serait de la forme $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2$; $\mathfrak{T}_1$ serait d'ordre 5, l'ordre de $\mathfrak{T}_2$ devrait être divisible par 4, ce qui est impossible.

156. II. Soit $\rho=3$, $\omega=3^4+1=82$. Puisque ω n'est pas divisible par 4, on a $t=1$. D'ailleurs l'inégalité (3), qui devient ici

$$4(3^{4\beta}-1)\equiv 0 \qquad (\text{mod } 82),$$

n'est satisfaite que pour $\beta=0$ et γ n'est susceptible que de 2 valeurs. Donc $t-t'=1$, $r\leqq 2$.

Λ contient la substitution f^2 d'ordre 41. Elle ne peut être contenue dans $\overline{\Lambda}$ dont l'ordre est $2.2^{2r+3}O$, O désignant l'ordre d'un groupe auxiliaire (mod 2) où le nombre $2(r+3)$ des variables est au plus égal à 10. Or aucun de ces groupes n'a son ordre divisible par 41.

157. III et IV. Si $\rho=2$ et $\omega=5^2-1$ ou 3^2-1, on tombe sur des cas exclus (**42** et **58**).

158. V. Si $\rho=2$ et $\omega=5^2+1$, on aura $t-t'=1$, d'où $r<1$, $r+\rho<3$; Λ contient une substitution f^2 d'ordre 13; mais l'ordre de $\overline{\Lambda}$ ne peut être divisible par 13.

159. VI. Si $\rho=2$ et $\omega=3^2+1$, on aura encore $t-t'=1$, $r<1$, $r+\rho<3$.

Si $r = 1$, H contiendra un couple unique A, B, de caractère nécessairement égal à 1; A contiendra une substitution d'ordre 3 transformant A, B en B, AB et une autre substitution f^2 d'ordre 5; $\overline{H}$ contient deux couples de génératrices $\overline{A}_1, \overline{B}_1$; $\overline{A}_2, \overline{B}_2$. Mais de quelque manière que soit choisi le groupe auxiliaire qui sert à construire $\overline{A}$, son ordre ne peut être divisible à la fois par 3 et par 5.

Si $r = 0$, A contiendra encore f^2, mais l'ordre de $\overline{A}$ ne peut être divisible par 5.

140. Passons aux cas où $\rho = 1$. Désignant respectivement par Σ_H, $\Sigma_{\overline{H}}$, Σ_K la somme des caractères des couples de substitutions qui engendrent respectivement H, $\overline{H}$, K, on aura dans le groupe L^0

$$\Sigma u = \Sigma_H + \Sigma_K.$$

Et pour que $\overline{L}^0$ admette une forme invariante non nulle, il faut qu'on ait

$$\tau + \Sigma_{\overline{H}} + \Sigma_K \equiv 0 \pmod 2 \qquad (\mathbf{29}).$$

On en déduit

$$\tau + \Sigma u \equiv \Sigma_H + \Sigma_{\overline{H}} \pmod 2.$$

Or, r ne peut surpasser ρ. S'il est nul, $\Sigma_H = 0$ et $\Sigma_{\overline{H}} = 1$, car $\overline{H}$ ne contient qu'un seul couple, qui doit avoir 1 pour caractère, si l'on veut éviter de tomber sur un cas exclu (**40**).

Si $r = 1$, Σ_H est égal à 1; et A a son ordre divisible par 3. Pour qu'il en soit de même pour $\overline{A}$, il faut que le groupe auxiliaire à 4 variables (mod 2) qui sert à le construire soit décomposable; auquel cas $\Sigma_{\overline{H}} = 2$.

On aura donc nécessairement

$$\tau + \Sigma u \equiv 1 \pmod 2.$$

Cette condition étant supposée remplie, nous rencontrons, si $\omega = 5 - 1$ ou $3 + 1$, des cas d'exclusion signalés aux n^{os} **43** et **44**.

Si $\omega = 7 + 1$ ou $7 - 1$, L ne peut être contenu dans un groupe $\overline{L}$ de troisième catégorie, celui-ci ne pouvant contenir de substitution qui multiplie sa forme invariante Φ par un non résidu de 7 (car 2 est non résidu).

Mais si L doit être employé comme groupe auxiliaire (ce qui suppose $\tau = 1$), L^0 sera contenu dans $\overline{L}^0$; cas d'exclusion signalés aux n^{os} **46** et **47**.

141. Il ne reste plus pour terminer cette laborieuse discussion qu'à examiner le cas où $\rho = 1$, $\omega = 5 + 1$. On aura ici $t - t' = 1$, d'où $r = 0$. Le groupe A contiendra la substitution f^2 d'ordre 3 et une substitution P′ qui la transforme en son carré. Le groupe A est dérivé d'un couple $\overline{A}$, $\overline{B}$ et d'une substitution S qui permute circulairement les substitutions A, B, AB. Il ne contient pas la substitution qui échange A et B, laquelle transformerait S en S^2; car cette substitution correspondrait à une substitution impaire du groupe auxiliaire et 2 n'est pas résidu de 5. Donc $\overline{A}$ ne peut contenir A.

375

TABLE DES MATIÈRES.

SEPTIÈME SÉRIE. — TOME III.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 1889.
(*Note de la Rédaction.*)

Pages.

Sur la représentation conforme; par M. *F. Montel*..... 1

Mouvements algébriques dans le plan; par M. *J.-A. Barrau*.. 55

Sur les quartiques gauche de première espèce, leurs représentations paramétriques et leur classification; par M. *R. de Montessus de Ballore*..... 77

Sur un cas particulier de diffraction des images des astres circulaires; par M. *Maurice Hamy*..... 171

Problèmes de Géométrie arithmétique; par M. *Harris Hancock*. 217

Congruence se rapportant aux nombres de Bernoulli et d'Euler au module p^{i+1}; par M. *F.-W. Burstall*..... 247

Mémoire sur les groupes résolubles; par M. *Camille Jordan*.. 263

FIN DU TOME III DE LA SEPTIÈME SÉRIE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Ce,

58590 Quai des Grands-Augustins, 55

QA
1
J684
sér.7
t.3
Physical &
Applied Sci.
Serials

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY